Université Grenoble Alpes

Rapport de travail d'étude et de recherche

Théorème des nombres premiers et hypothèse de Riemann

Figure 1 – Bernhard Riemann

Auteur : Valentine Soto

Encadrante : Agnès Coquio

Année 2018-2019

Table des matières

Introduction

Le problème de la répartition des nombres premiers remonte au $XVIII^e$ siècle avec la conjecture de Gauss et de Legendre qui dit que : $\pi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{\ln(x)}$ $(\star)$ où $\pi(x)$ est le nombre de nombres premiers inférieurs à x.
Cette conjecture, démontrée indépendamment par Hadamard et de La Vallée Poussin en 1896, est appelée aujourd'hui le théorème des nombres premiers

Avant d'en arriver à la démonstration de cette conjecture, Tchebychev a montré des résultats qui étaient encourageant pour cette dernière. Il a notamment montré que si $\frac{\pi(x)\ln(x)}{x}$ admet une limite quand x tend vers $+\infty$ alors cette limite vaut 1 et a exhibé deux constantes $0 < a < 1 < b$, proches de 1 telles que pour x suffisamment grand, on a : $a < \dfrac{\pi(x)\ln(x)}{x} < b$ où $a = 0,92129$ et $b = 1,105548$.

L'outil essentiel de la démonstration d'Hadamard est la fonction zêta de Riemann définie par : $\zeta(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}$.
Riemann eût l'idée de définir cette fonction en 1859 en se basant sur les travaux d'Euler, qui a montré en 1737 que : $\forall k > 1, \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^k} = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^k}\right)^{-1}$. Cette formule étendue aux complexes donne un lien explicite entre la fonction zêta et les nombres premiers.

Dans ses recherches pour démontrer la conjecture $(\star)$, Riemann avait besoin de localiser les zéros de la fonction de zêta. Il en arrive donc à énoncer sa fameuse conjecture, qui n'est toujours pas prouvée aujourd'hui, et qui dit que : "tous les zéros non triviaux de ζ [1] se trouvent sur la droite $\left\{z \in \mathbb{C}, \Re(z) = \frac{1}{2}\right\}$".

Dans ce rapport, on va s'intéresser tout d'abord aux énoncés équivalents au théorème des nombres premiers afin de démontrer ce dernier : on va notamment montrer que le théorème des nombres premiers équivaut au fait que la fonction ζ n'a pas de zéros sur la droite $\{z \in \mathbb{C}, \Re(z) = 1\}$.

On va ensuite établir une majoration standard de l'erreur associée au théorème des nombres premiers.

Pour finir, on va s'intéresser à un énoncé équivalent à la conjecture de Riemann : on va montrer que cette hypothèse est équivalent à une majoration plus fine de l'erreur associée au théorème des nombres premiers.

1. Les zéros non triviaux de ζ sont les zéros qui se trouvent dans la bande $\{z \in \mathbb{C}, 0 < \Re(z) < 1\}$

<u>Notations</u>

On va tout d'abord introduire les notations qui seront souvent utilisées dans la suite.

$\star$ Pour $z \in \mathbb{C}$, on note $\Re(z)$, sa partie imaginaire et $\Im(z)$, sa partie imaginaire.

$\star$ Pour $a \in \mathbb{R}$, on note $\Omega_a = \{z \in \mathbb{C}, \Re(z) > a\}$.

$\star$ Pour $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$, on note $D(z_0, r)$ le disque centré en z_0 et de rayon r.

$\star$ Pour $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$, on note $\mathcal{C}(z_0, r)$ le cercle centré en z_0 et de rayon r

$\star$ On note $\mathcal{P}$, l'ensemble des nombres premiers.

$\star$ On note $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, la suite strictement croissante des nombres premiers.

$\star$ Pour une fontion méromorphe f et z, un pôle de f, on note $Res(z, f)$, le résidu de f en z.

$\star$ Pour une fonction méromorphe f, on note Z_f et P_f, l'ensemble de ses zéros et de ses pôles, respectivement, comptés avec multiplicité.

$\star$ ln désigne le logarithme népérien.

$\star$ Pour $C \in \mathbb{R}$ et deux fonctions f et g, on dit que $f = O_C(g)$ s'il existe une constante K_C qui dépend de C tel que : $|f| \leq K_C|g|$.

I. Propriétés élémentaires de la fonction zêta de Riemann

Définition 1 (Fonction zêta de Riemann)**.**

On définit la fonction zêta de Riemann sur Ω_1 par : $\zeta : z \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}$.

Remarque. La fonction ζ est bien définie sur Ω_1.

En effet, on a : $\forall n \geq 1, \forall z \in \Omega_1, \left|\frac{1}{n^z}\right| = \frac{1}{n^{\Re(z)}}$ et $\sum_n \frac{1}{n^{\Re(z)}}$ converge pour $z \in \Omega_1$.

1- Holomorphie de la fonction zêta de Riemann

Proposition 2. *ζ est une fonction holomorphe sur Ω_1.*

Démonstration. Par le théorème de Weierstrass, il suffit de montrer que pour tout compact K de Ω_1, on a convergence uniforme de la série qui définie ζ.

Soit K, un compact de Ω_1 : il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $z \in K$, $\Re(z) \geq 1 + \varepsilon$.

On a alors : $\forall n \geq 1, \forall z \in K, \left|\frac{1}{n^z}\right| = \frac{1}{n^{\Re(z)}} \leq \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$.

Comme $\varepsilon > 0$, $\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est le terme général d'une série convergente, positive et indépendante de z.

Donc : $\sum_n \frac{1}{n^z}$ converge normalement sur K donc converge uniformément sur K.

$\square$

Proposition 3. *ζ est prolongeable en une fonction holomorphe sur $\Omega_0 \backslash \{1\}$ et a un pôle simple en 1, de résidu 1.*

Démonstration. $\diamond$ On va commencer par montrer que : $\forall N \geq 2, \forall z \in \Omega_1, \displaystyle\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^z} = \frac{1}{z-1} - \frac{N^{1-z}}{z-1} - z\int_1^N (t - \lfloor t \rfloor)\frac{1}{t^{1+z}}dt.$

On a : $\forall N \geq 2, \forall z \in \Omega_1, z\displaystyle\int_1^N (t - \lfloor t \rfloor)\frac{1}{t^{1+z}}dt = \sum_{n=1}^{N-1}\int_n^{n+1}(t-n)z\frac{1}{t^{1+z}}dt$

$$= \sum_{n=1}^{N-1} z\int_n^{n+1}\frac{1}{t^z}dt - \sum_{n=1}^{N-1} nz\int_n^{n+1}\frac{1}{t^{1+z}}dt$$

$$= \sum_{n=1}^{N-1}\left[\frac{z}{z-1}(n^{1-z} - (n+1)^{1-z}) + n((n+1)^{-z} - n^{-z})\right]$$

$$= \frac{z}{z-1}(1 - N^{1-z}) + \sum_{n=1}^{N-1}[(n+1)^{1-z} - n^{1-z}] - \sum_{n=1}^{N-1}(n+1)^{-z}$$

$$= \frac{z}{z-1}(1 - N^{1-z}) - 1 + N^{1-z} - \sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n^z}.$$

D'où : $\forall N \geq 2, \forall z \in \Omega_1, \displaystyle\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^z} = \frac{1}{z-1} - \frac{N^{1-z}}{z-1} - z\int_1^N (t - \lfloor t \rfloor)\frac{1}{t^{1+z}}dt.$

$\diamond$ On va maintenant montrer que : $\forall z \in \Omega_1, \zeta(z) = \displaystyle\frac{z}{z-1} - z\int_1^{+\infty}(t - \lfloor t \rfloor)\frac{1}{t^{1+z}}dt.$

$*$ On a : $\forall z \in \Omega_1, \forall t \geq 1, (|t - \lfloor t \rfloor|)\displaystyle\frac{1}{|t^{1+z}|} \leq \frac{1}{t^{1+\Re(z)}}$ et $t \mapsto \displaystyle\frac{1}{t^{1+\Re(z)}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ pour $z \in \Omega_1$.

Donc : $t \mapsto (t - \lfloor t \rfloor)\displaystyle\frac{1}{t^{1+z}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ pour $z \in \Omega_1$.

$*$ De plus, $\forall z \in \Omega_1, |N^{1-z}| = N^{1-\Re(z)} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $\Re(z) > 1$.

En passant à la limite quand N tend vers $+\infty$, on a : $\forall z \in \Omega_1, \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^z} = \frac{1}{z-1} - z\int_1^{+\infty}(t - \lfloor t \rfloor)\frac{1}{t^{1+z}}dt.$

Autrement dit : $\forall z \in \Omega_1, \zeta(z) = \displaystyle\frac{z}{z-1} - z\int_1^{+\infty}(t - \lfloor t \rfloor)\frac{1}{t^{1+z}}dt.$

$\diamond$ Il reste à vérifier que la fonction de droite est une fonction holomorphe sur $\Omega_0 \backslash \{1\}$ et a un pôle simple en 1, de résidu 1.

On va utiliser le théorème de dérivation sous le signe intégrale pour montrer que l'intégrale est une fonction holomorphe sur Ω_0 :

— $z \mapsto (t - \lfloor t \rfloor)\displaystyle\frac{1}{t^{1+z}}$ est holomorphe sur Ω_0 pour $t > 1$;
— Soit K, un compact de Ω_0 : il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $z \in K$, $\Re(z) \geq \varepsilon$.

On a : $\forall t \geq 1, \forall z \in K, \displaystyle\frac{|t - \lfloor t \rfloor|}{t^{1+\varepsilon}} \leq \frac{1}{t^{1+\varepsilon}}$ et $t \mapsto \displaystyle\frac{1}{t^{1+\varepsilon}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, positive et indépendante de z.

On en déduit donc que : $z \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} (t - \lfloor t \rfloor) \frac{1}{t^{1+z}} dt$ est holomorphe sur Ω_0.

Comme $z \mapsto \dfrac{z}{z-1}$ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \backslash \{1\}$ qui a un pôle simple en 1, de résidu 1, on en déduit le résultat sur la fonction ζ.

□

2- Lien entre la fonction zêta de Riemann et les nombres premiers

Proposition 4 (Proposition d'Euler généralisée)**.**

On a :

$$\forall z \in \Omega_1, \zeta(z) = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{{p_n}^z}\right)^{-1}.$$

Démonstration. ⋄ On va commencer par montrer que le produit infini est bien défini pour $z \in \Omega_1$.

Pour cela, on a besoin de la détermination principale du logarithme que l'on notera par la suite *Log*.

∗ On a : $\forall n \geq 1, \forall z \in \Omega_1, \left|\dfrac{1}{{p_n}^z}\right| = \dfrac{1}{{p_n}^{\Re(z)}} \leq \dfrac{1}{n^{\Re(z)}}$ et $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n^{\Re(z)}}$ converge pour $z \in \Omega_1$.

Donc : $\displaystyle\sum_n \frac{1}{p_n^z}$ converge absolument pour $z \in \Omega_1$.

∗ Par ailleurs, à partir d'un certain rang, $Log\left(1 - \dfrac{1}{{p_n}^z}\right)$ est bien défini pour $z \in \Omega_1$ car :

$\forall z \in \Omega_1, 1 - \dfrac{1}{{p_n}^z} \in \mathbb{R}_- \Leftrightarrow \dfrac{1}{{p_n}^z} \in [1, +\infty[\Rightarrow \left|\dfrac{1}{{p_n}^z}\right| \geq 1$ et $\dfrac{1}{{p_n}^z} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

De plus, il existe $C \geq 0$ tel que pour tout $z \in \Omega_1, \left|Log\left(1 - \dfrac{1}{{p_n}^z}\right)\right| \leq C\left|\dfrac{1}{{p_n}^z}\right|$.

Donc : $\displaystyle\sum_n Log\left(1 - \frac{1}{{p_n}^z}\right)$ converge absolument pour $z \in \Omega_1$ et il en est de même pour $\displaystyle\prod_n \left(1 - \frac{1}{{p_n}^z}\right)$.

∗ Par ailleurs : $\forall n \geq 1, \forall z \in \Omega_1, |{p_n}^z| = {p_n}^{\Re(z)} > 1$ d'où : $\forall n \geq 1, \forall z \in \Omega_1, \dfrac{1}{{p_n}^z} \neq 1$.

On a donc : $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{{p_n}^z}\right) \neq 0$ et $\displaystyle\prod_n \left(1 - \frac{1}{{p_n}^z}\right)^{-1}$ est bien défini pour $z \in \Omega_1$.

⋄ On note pour $j \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$, $A_{j,k} = \{n \in \mathbb{N}^*, \exists k_1, \ldots, k_j \in \mathbb{N}, n = {p_1}^{k_1} \ldots {p_j}^{k_j} \textit{ et } k_1 + \ldots + k_j = k\}$;

$$A_j = \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_{j,k}.$$

On remarque que pour j fixé, $A_{j,k} \bigcap A_{j,k'} = \emptyset$ si $k \neq k'$ d'où : $A_j = \bigsqcup_{k=0}^{+\infty} A_{j,k}$ et $(A_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ est une suite croissante.

De plus, $1 \in A_{1,0}$ et tout entier supérieur à 2 admet une décomposition en facteurs premiers, d'où : $\mathbb{N}^* = \bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j$.

On en déduit que : $\forall z \in \Omega_1, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z} = \lim_{j \to +\infty} \sum_{n \in A_j} \frac{1}{n^z}$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{j \to +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n \in A_{j,k}} \frac{1}{n^z} \\
&= \lim_{j \to +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\substack{k_1, \ldots, k_j \in \mathbb{N} \\ k_1 + \ldots + k_j = k}} \frac{1}{\left({p_1}^{k_1} \ldots {p_j}^{k_j}\right)^z} \\
&= \lim_{j \to +\infty} \prod_{i=1}^{j} \left[\sum_{k_i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{{p_i}^z} \right)^{k_i} \right] (\star) \\
&= \lim_{j \to +\infty} \prod_{i=1}^{j} \left(1 - \frac{1}{{p_i}^z} \right)^{-1} \\
&= \prod_{i=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{{p_i}^z} \right)^{-1}.
\end{aligned}
$$

$(\star)$ Ces sommes infinies sont bien définies car : $\forall z \in \Omega_1, \forall j \geq 1, \forall i \in \{1, \ldots, j\}, \left| \frac{1}{{p_i}^z} \right| < 1$.

$\square$

II. Théorème des nombres premiers

Théorème 5 (Théorème des nombres premiers)**.**

On définit $\pi : x \mapsto |\{p \in \mathcal{P}, p \leq x\}|$ *pour* $x \geq 1$.

On a :

$$\pi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{\ln(x)}.$$

Dans cette partie, on va s'intéresser particulièrement aux propositions équivalentes au théorème des nombres premiers et cela permettra de démontrer le théorème en lui-même. Cette partie s'inspire du chapitre XII de [1].

1- Fonctions de Tchebychev

Définition 6 (Fonction de von Mangoldt)**.**

On définit la fonction de von Mangoldt sur $\mathbb{N}^*$ par : $\Lambda(n) = \begin{cases} \ln(p) & \text{s'il existe } k \in \mathbb{N}^* \text{ et } p \in \mathcal{P} \text{ tel que } n = p^k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Définition 7 (Fonctions de Tchebychev)**.** On définit les trois fonctions de Tchebychev suivantes :

$$\phi : x \mapsto \sum_{\substack{p\in\mathcal{P}\\ p\leq x}} \ln(p) \qquad \text{et} \qquad \Phi : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(p_n)}{{p_n}^z} \text{ pour } z \in \Omega_1 \qquad \text{et} \qquad \psi : x \mapsto \sum_{n\leq x} \Lambda(n).$$

Remarque. La fonction Φ est bien définie pour $z \in \Omega_1$.

En effet : $\forall z \in \Omega_1, \forall n \geq 3, \left|\frac{\ln(p_n)}{{p_n}^z}\right| = \frac{\ln(p_n)}{{p_n}^{\Re(z)}} \leq \frac{\ln(n)}{n^{\Re(z)}}$ car pour $\sigma > 1, x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^\sigma}$ est décroissante sur $[\ e^{\frac{1}{\sigma}}, +\infty[$.

Comme $\sum_n \frac{\ln(n)}{n^{\Re(z)}}$ converge pour $z \in \Omega_1$, on a le résultat voulu.

Proposition 8. *Il existe* $C_0 > 0$ *tel que :* $\forall x \geq 2, \phi(x) \leq C_0 x$.

Démonstration. $\diamond$ On va commencer par montrer que : $\forall x \geq 1, \phi(2x) - \phi(x) \leq 2(\ln(2) + 1)x$.

$*$ On a : $\forall n \geq 1, 2^{2n} = (1 + 1)^{2n} = \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} \geq \binom{2n}{n} =: k_n \in \mathbb{N}$.

Or, tout nombre premier p qui appartient à $]n, 2n]$, où $n \geq 1$, divise $(2n)!$ et ne divise pas $n!$ donc divise k_n.

On en déduit que : $\forall n \geq 1, \binom{2n}{n} \geq \prod_{\substack{p\in\mathcal{P}\\ n<p\leq 2n}} p$ et donc : $\forall n \geq 1, \prod_{\substack{p\in\mathcal{P}\\ n<p\leq 2n}} p \leq 2^{2n}$.

Ainsi, on a : $\forall n \geq 1, \phi(2n) - \phi(n) \leq 2n\ln(2)$.

$*$ Soit $x \geq 1$: il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \leq x < n+1$.

- Si $2x \in [2n, 2n+1[$, on a : $\phi(2x) = \phi(2n)$.
- Si $2x \in [2n+1, 2n+2[$, on a : $\phi(2x) \leq \phi(2n) + \ln(2n+1) \leq \phi(2n) + \ln(2x)$.

Dans les deux cas, on a : $\phi(2x) \leq \phi(2n) + \ln(2x)$ et on a de plus : $\phi(x) = \phi(n)$.

On a donc : $\phi(2x) - \phi(x) \leq \phi(2n) + \ln(2x) - \phi(n) \leq 2n\ln(2) + 2x = 2(\ln(2)+1)x$.

$\diamond$ Soit $x \geq 1$: il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $2^r \leq x < 2^{r+1}$ et on a alors $x, \ldots, \frac{x}{2^r} \in [1, +\infty[$.

On peut alors appliquer ce qui précède aux $\frac{x}{2^i}$ pour $i \in \{1, \ldots, r\}$ et en sommant toutes les inégalités obtenues, on a : $\sum_{i=0}^{r} \left[\phi\left(\frac{x}{2^{i-1}}\right) - \phi\left(\frac{x}{2^i}\right)\right] \leq \sum_{i=0}^{r} 2(\ln(2)+1)\frac{x}{2^i}$.

D'où : $\phi(2x) - \phi\left(\frac{x}{2^r}\right) \leq 2(\ln(2)+1)x\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{r+1}}{1-\frac{1}{2}} \leq 4(\ln(2)+1)x$.

Or : $\phi\left(\frac{x}{2^r}\right) = 0$ car $\frac{x}{2^r} \in [1, 2[$ donc : $\phi(2x) \leq 4(\ln(2)+1)x$.

En posant $C_0 = 2(\ln(2)+1) > 0$, on a le résultat sur la fonction ϕ.

$\square$

Proposition 9. *Pour* $z \in \Omega_1, \Phi(z) = z\int_1^{+\infty} \frac{\phi(x)}{x^{z+1}}dx$.

Démonstration. $\diamond$ On va commencer par montrer que l'intégrale est bien définie.

On a : $\forall x \geq 1, \forall z \in \Omega_1, \left|\frac{\phi(x)}{x^{1+z}}\right| \leq \frac{C_0}{x^{\Re(z)}}$ par la proposition précédente et car $\phi \equiv 0$ sur $[1, 2[$.

Comme $x \mapsto \frac{C_0}{x^{\Re(z)}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ pour $z \in \Omega_1$, l'intégrale est bien définie.

$*$ Comme $\phi = 0$ sur $[1,2[$, on a : $\forall z \in \Omega_1, z\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\phi(x)}{x^{z+1}}dx$

$$\begin{aligned}
z\int_1^{+\infty} \frac{\phi(x)}{x^{z+1}}dx &= \sum_{j=1}^{+\infty} \int_{p_j}^{p_{j+1}} z\frac{\phi(x)}{x^{z+1}}dx \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty} \phi(p_j) \int_{p_j}^{p_{j+1}} \frac{z}{x^{z+1}}dx \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty} \phi(p_j) \left(\frac{1}{{p_j}^z} - \frac{1}{{p_{j+1}}^z}\right) \\
&= \frac{\phi(2)}{2^z} + \sum_{j=2}^{+\infty} \frac{\phi(p_j) - \phi(p_{j+1})}{{p_j}^z} \\
&= \frac{\ln(2)}{2^z} + \sum_{j=2}^{+\infty} \frac{\ln(p_j)}{{p_j}^z} \\
&= \Phi(z).
\end{aligned}$$

□

2- Enoncés équivalents au théorème des nombres premiers

Avant d'énoncer le théorème sur les équivalents au théorème des nombres premiers, on va d'abord énoncer un lemme, qui sera utile dans la démonstration de ce théorème. La démonstration de ce lemme est donnée en annexe.

Lemme 10. *Soit* $f \in L^\infty([0,+\infty[)$ *et* $F : z \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tz} f(t)dt$.

On suppose que F*, qui est holomorphe sur* Ω_0*, possède un prolongement holomorphe sur un voisinage* V *de* $\overline{\Omega_0}$.

On a alors : $\displaystyle\int_0^T f(t)dt$ *converge quand* T *tend vers* $+\infty$ *et* $F(0) = \displaystyle\lim_{T\to+\infty} \int_0^T f(t)dt$.

Remarque. Le théorème de dérivation sous le signe intégrale justifie que F est une fonction holomorphe sur Ω_0.

En effet, on a :

— $z \mapsto e^{-tz} f(t)$ est holomorphe sur Ω_0 pour $t > 0$;
— Soit K, un compact de Ω_0 : il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $z \in K, \Re(z) \geq \varepsilon$.

On a : $\forall z \in K, \forall t > 0, |e^{-tz} f(t)| \leq \|f\|_\infty e^{-t\varepsilon}$.

Comme $t \mapsto \|f\|_\infty e^{-t\varepsilon}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, positive et indépendante de z, on en déduit que F est bien une fonction holomorphe sur Ω_0.

Théorème 11 (Enoncés équivalents au théorème des nombres premiers)**.**

Les énoncés suivants sont équivalents :

1. $\pi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{\ln(x)}$;
2. $\phi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$;
3. $\psi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$;
4. ζ *ne s'annule pas sur la droite* $\{z \in \mathbb{C}, \Re(z) = 1\}$.

Démonstration. Pour montrer ces équivalences, on va procéder de la sorte : (4) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4).

$\diamond$ On suppose (4) et on veut montrer (2).

$*$ On va commencer par montrer qu'il existe une fonction holomorphe h sur $\Omega_{\frac{1}{2}}$ telle que : $\forall z \in \Omega_1, \Phi(z) = -\dfrac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} + h(z)$.

. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : z \mapsto \left(1 - \dfrac{1}{{p_n}^z}\right)^{-1}$ pour $z \in \Omega_1$.

Par la proposition 4, on sait que : $\forall z \in \Omega_1, \zeta(z) = \lim\limits_{N\to+\infty} \prod\limits_{n=1}^{N} f_n(z)$.

Par le théorème de Weierstrass, on a : $\forall z \in \Omega_1, \zeta'(z) = \lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{N} \left[f_k'(z) \prod\limits_{n\neq k} f_n(z) \right]$.

On en déduit que : $\forall z \in \Omega_1, \dfrac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{N} \dfrac{f_k'(z)}{f_k(z)} = \lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{N} -\dfrac{\ln(p_k)}{{p_k}^z - 1} = -\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\ln(p_k)}{{p_k}^z - 1}$.

On pose alors $h : z \mapsto \Phi(z) + \dfrac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\ln(p_k)({p_k}^z - 1) - \ln(p_k){p_k}^z}{{p_k}^z({p_k}^z - 1)} = -\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\ln(p_k)}{{p_k}^z({p_k}^z - 1)}$ sur Ω_1.

. Il reste à montrer que h est holomorphe sur $\Omega_{\frac{1}{2}}$: par le théorème de Weierstrass, il suffit de montrer que la série converge uniformément sur tout compact de $\Omega_{\frac{1}{2}}$.

Soit K, un compact de $\Omega_{\frac{1}{2}}$: il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $z \in K, \Re(z) \geq \frac{1}{2} + \varepsilon$.

On a : $\forall z \in K, \forall k \geq 1, |{p_k}^z({p_k}^z - 1)| \geq {p_k}^{\Re(z)}({p_k}^{\Re(z)} - 1) \geq k^{\Re(z)}(k^{\Re(z)} - 1)$.

Ainsi, on a pour k assez grand et pour $z \in K$, $|{p_k}^z({p_k}^z - 1)| \geq \dfrac{1}{2}k^{2\Re(z)}$ et il existe $C > 0$ tel que $\ln(p_k) \leq C{p_k}^{\varepsilon}$.

D'où : $\forall z \in K, \forall k \geq 1, \left| \dfrac{\ln(p_k)}{{p_k}^z({p_k}^z - 1)} \right| \leq \dfrac{C}{k^{2\Re(z)-\varepsilon}} \leq \dfrac{C}{k^{1+\varepsilon}}$.

Comme $\varepsilon > 0$, $\left(\dfrac{C}{k^{1+\varepsilon}}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est le terme général d'une série convergente, positive et indépendante de z.

Donc la série qui définit h converge normalement sur K, donc converge uniformément sur K : h est donc holomorphe sur $\Omega_{\frac{1}{2}}$ et on a le résultat.

$*$ On va ensuite montrer que $z \mapsto \Phi(z) - \dfrac{1}{z-1}$ se prolonge en une fonction holomorphe sur un voisinage de $\overline{\Omega_1}$.

Comme ζ ne s'annule pas sur la droite $\{z \in \mathbb{C}, \Re(z) = 1\}$ et admet un pôle simple en 1, $z \mapsto -\dfrac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} - \dfrac{1}{z-1}$ est holomorphe sur un voisinage de $\overline{\Omega_1}$ privé d'un disque $D(1, \varepsilon)$ où $\varepsilon > 0$.

En effet, on considère $n \in \mathbb{N}$ tel que $\varepsilon < n$.

Sur le compact $K_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C}, \Re(z) = 1 \ et \ \varepsilon \leq \Im(z) \leq n\}$, il existe η tel que pour tout $z \in K_\varepsilon$, $|\zeta(z)| \geq \eta$.

On peut alors prolonger ζ en une fonction holomorphe qui ne s'annule pas sur un voisinage V_ε de K_ε.

On peut faire de même avec les compacts de la forme $K_{-\varepsilon} = \{z \in \mathbb{C}, \Re(z) = 1 \ et \ -n \leq \Im(z) \leq -\varepsilon\}$ et $K_k = \{z \in \mathbb{C}, \Re(z) = 1 \ et \ k \leq \Im(z) \leq k+1\}$ pour $k \in \mathbb{Z}$ tel que $|k| > n$.

En faisant l'union des voisinages ainsi obtenus, on a bien un prolongement de $\dfrac{\zeta'}{\zeta}$ sur un voisinage de $\overline{\Omega_1}$.

De plus, par la proposition 3, il existe v, une fonction holomorphe sur Ω_0 tel que : $\forall z \in \Omega_1, \zeta(z) = \dfrac{1}{z-1} + v(z)$.

D'où : $\forall z \in \Omega_1, -\dfrac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} - \dfrac{1}{z-1} = \dfrac{-v(z) - (z-1)v'(z)}{1 + v(z)(z-1)}$.

Comme le membre de droite se prolonge en une fonction holomorphe dans $D(1, \varepsilon)$, on a le résultat.

$*$ On va maintenant montrer que $\displaystyle\int_1^T \frac{\phi(x) - x}{x^2} dx$ converge quand T tend vers $+\infty$.

On considère la fonction $f : t \mapsto \dfrac{\phi(e^t) - e^t}{e^t}$ et on veut montrer que f vérifie les hypothèses du lemme 10.

. On remarque tout d'abord que $f \in L^\infty([0, +\infty[)$ grâce à la proposition 8.

. On pose ensuite $F : z \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-tz} f(t) dt$: F est donc holomorphe sur Ω_0 par la remarque précédente.

On veut montrer que F se prolonge en une fonction holomorphe sur un voisinage de $\overline{\Omega_0}$.

On a : $\forall z \in \Omega_0, F(z) \underset{x=e^t}{=} \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\phi(x) - x}{x^{2+z}} dx = \frac{\Phi(z+1)}{z+1} - \frac{1}{z}$ par la proposition 9.

Or, par ce qui précède, $w : z \mapsto \Phi(z+1) - \dfrac{1}{z}$ est holomorphe sur un voisinage de $\overline{\Omega_0}$ et : $\forall z \in \Omega_0, \dfrac{\Phi(z+1)}{z+1} - \dfrac{1}{z} = \dfrac{w(z) - 1}{z+1}$.

Comme le membre de droite est holomorphe sur un voisinage de $\overline{\Omega_0}$, F l'est aussi.

On peut donc appliquer le lemme 10 à la fonction f, ce qui donne le résultat car : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t) dt \underset{x=e^t}{=} \int_1^{+\infty} \frac{\phi(x) - x}{x^2} dx$.

$*$ Soit $\varepsilon > 0$, on note $A_+ = \{x \geq 1, \phi(x) \geq (1+\varepsilon)x\}$ et $A_- = \{x \geq 1, \phi(x) \leq (1-\varepsilon)x\}$.

Pour montrer (2), il suffit de montrer que A_+ et A_- sont bornés.

En effet, dans ce cas, il existe $x_0 \geq 1$ tel que : $\forall x \geq x_0, 1-\varepsilon < \dfrac{\phi(x)}{x} < 1+\varepsilon$ autrement dit : $\forall x \geq x_0, \left|\dfrac{\phi(x)}{x} - 1\right| \leq \varepsilon$.

Ceci étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on a : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\phi(x)}{x} = 1$.

. On suppose par l'absurde que A_+ n'est pas borné.

Il existe alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in {A_+}^{\mathbb{N}}$ tel que $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\phi(x_n) \geq (1+\varepsilon)x_n$.

Comme ϕ est croissante, on a : $\forall n \geq 0, \forall t \geq x_n, \phi(t) \geq \phi(x_n)$.

On a donc : $\displaystyle\int_{x_n}^{(1+\varepsilon)x_n} \frac{\phi(t)-t}{t^2}dt \geq \int_{x_n}^{(1+\varepsilon)x_n} \frac{(1+\varepsilon)x_n - t}{t^2}dt \underset{y=\frac{t}{x_n}}{=} \int_1^{1+\varepsilon} \frac{1+\varepsilon-y}{y^2}dy = \varepsilon - \ln(1+\varepsilon) > 0$.

De plus, comme $\displaystyle\int_0^T \frac{\phi(t)-t}{t^2}dt$ converge quand T tend vers $+\infty$, on a : $\displaystyle\int_{x_n}^{(1+\varepsilon)x_n} \frac{\phi(t)-t}{t^2}dt \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

On aboutit alors à une contradiction : A_+ est donc borné.

. En raisonnant de même, on montre que A_- est borné.

$\diamond$ On suppose (2) et on veut montrer (1).

$*$ On a : $\forall x \geq 1, \phi(x) \leq \ln(x)\pi(x)$.

$*$ De plus : $\displaystyle\forall\, 0 < \varepsilon < 1, \forall x \geq 1, \phi(x) \geq \sum_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ x^{1+\varepsilon} < p \leq x}} \ln(p) \geq (1-\varepsilon)\ln(x)\left(\pi(x) - \sum_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \leq x^{1+\varepsilon}}} 1\right) \geq (1-\varepsilon)\ln(x)(\pi(x) - x^{1+\varepsilon})$.

On a alors : $\displaystyle\forall\, 0 < \varepsilon < 1, \forall x \geq 1, \frac{\phi(x)}{x} \leq \frac{\ln(x)\pi(x)}{x} \leq \frac{\phi(x)}{(1-\varepsilon)x} + \frac{\ln(x)}{x^\varepsilon}$.

Par passage à la limite, on a alors : $\displaystyle\forall\, 0 < \varepsilon < 1,\ 1 \leq \varliminf_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)\pi(x)}{x} \leq \varlimsup_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)\pi(x)}{x} \leq \frac{1}{1-\epsilon}$.

Ceci étant valable pour tout $0 < \varepsilon < 1$, on en déduit que : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)\pi(x)}{x} = 1$ ce qui donne bien (1).

$\diamond$ On suppose (1) et on veut montrer (3).

$*$ On a : $\displaystyle\forall x \geq 1, \psi(x) = \sum_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \leq x}} \ln(p)|\{k \in \mathbb{N}, p^k \leq x\}| = \sum_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \leq x}} \ln(p)\left\lfloor \frac{\ln(x)}{\ln(p)} \right\rfloor \geq \sum_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \leq x}} \ln(p) = \phi(x)$.

$*$ De plus : $\forall x \geq 1, \psi(x) \leq \sum_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \leq x}} \ln(x) = \ln(x)\pi(x)$.

Par ce qui précède, on a pour $0 < \varepsilon < 1$ et pour $x \geq 1$, on a : $\dfrac{\phi(x)}{x} \geq (1-\varepsilon)\left[\dfrac{\ln(x)\pi(x)}{x} - \dfrac{\ln(x)}{x^{\varepsilon}}\right]$.

Par passage à la limite, on a alors : $\forall\ 0 < \varepsilon < 1,\ 1-\varepsilon \leq \varliminf_{x \to +\infty} \dfrac{\psi(x)}{x} \leq \varlimsup_{x \to +\infty} \dfrac{\psi(x)}{x} \leq 1$.

Ceci étant valable pour tout $0 < \varepsilon < 1$, on en déduit que : $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\psi(x)}{x} = 1$ ce qui donne bien (3).

$\diamond$ On suppose (3) et on veut montrer (4).

$*$ On va commencer par montrer que : $\forall z \in \Omega_1, \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\Lambda(n)}{n^z} = -\dfrac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}$.

. La série est bien définie car : $\forall n \geq 1, \forall z \in \Omega_1, \left|\dfrac{\Lambda(n)}{n^z}\right| \leq \dfrac{\ln(n)}{n^{\Re(z)}}$ et pour $z \in \Omega_1, \sum_n \dfrac{\ln(n)}{n^{\Re(z)}}$ converge.

. On a : $\forall z \in \Omega_1, \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\Lambda(n)}{n^z} = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(p_n) \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{({p_n}^z)^k} = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\ln(p_n)}{{p_n}^z - 1} = -\dfrac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}$ par ce qui précède.

$*$ On va ensuite montrer que : $\forall \sigma > 1, \forall t \neq 0, \displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{\psi(x)}{x^{1+\sigma+it}} dx = \dfrac{1}{\sigma+it} \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\Lambda(n)}{n^{\sigma+it}}$.

. L'intégrale est bien définie car : $\forall \sigma > 1, \forall t \neq 0, \left|\dfrac{\psi(x)}{x^{\sigma+it+1}}\right| = \dfrac{\psi(x)}{x^{\sigma+1}} \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{\sigma}}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x^{\sigma}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ pour $\sigma > 1$.

. On a : $\forall \sigma > 1, \forall t \neq 0,$

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{\psi(x)}{x^{\sigma+1+it}} dx &= \sum_{n=1}^{+\infty} \psi(n) \int_n^{n+1} \frac{1}{x^{\sigma+1+it}} dx \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\psi(n)}{\sigma+it} \left(\frac{1}{n^{\sigma+it}} - \frac{1}{(n+1)^{\sigma+it}}\right) \\
&= \frac{1}{\sigma+it} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\psi(n)-\psi(n-1)}{n^{\sigma+it}} \\
&= \frac{1}{\sigma+it} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma+it}}.
\end{aligned}$$

$*$ On suppose par l'absurde qu'il existe $t \neq 0$ tel que : $\zeta(1+it) = 0$.

. $-\frac{\zeta'}{\zeta}$ a donc un pôle simple en 1+it de résidu au plus -1 d'où : $-\Re\left(\dfrac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\right) \underset{\sigma \to 1^+}{\leq} \dfrac{-1}{\sigma-1} + o\left(\dfrac{1}{\sigma-1}\right)$.

Autrement dit : $\Re\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\Lambda(n)}{n^{\sigma+it}}\right) \underset{\sigma \to 1^+}{\leq} \dfrac{-1}{\sigma-1} + o\left(\dfrac{1}{\sigma-1}\right)$. $(\triangle)$

. Par hypothèse, il existe η tel que : $\eta(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\forall x \geq 1, \psi(x) = x + x\eta(x)$.

Soit $\varepsilon > 0$ et $A > 1$ tel que : $\forall x \geq A, |\eta(x)| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{1+t^2}}$

.On a : $\forall \sigma > 1, (\sigma-1)\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma+it}} = (\sigma-1)(\sigma+it)\int_1^{+\infty} \frac{\psi(x)}{x^{\sigma+1+it}}dx$

$$\begin{aligned}
&= (\sigma-1)(\sigma+it)\left[\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\sigma+it}}dx + \int_1^{+\infty} \frac{\eta(x)}{x^{\sigma+it}}dx\right] \\
&= \frac{(\sigma-1)(\sigma+it)}{\sigma-1+it} + (\sigma-1)(\sigma+it)\int_1^{+\infty} \frac{\eta(x)}{x^{\sigma+it}}dx.
\end{aligned}$$

Or : $\forall \sigma > 1, \left|(\sigma-1)(\sigma+it)\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\eta(x)}{x^{\sigma+it}}dx\right| \leq (\sigma-1)\sqrt{\sigma^2+t^2}\left[\int_1^{A} \frac{|\eta(x)|}{x^{\sigma}}dx + \int_A^{+\infty} \frac{|\eta(x)|}{x^{\sigma}}dx\right]$

$$\begin{aligned}
&\leq (\sigma-1)\sqrt{\sigma^2+t^2}\left[\|\eta\|_\infty \int_1^{A} \frac{1}{x^{\sigma}}dx + \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+t^2}}\int_A^{+\infty} \frac{1}{x^{\sigma}}dx\right] \ (\star) \\
&\leq \sqrt{\sigma^2+t^2}\,\|\eta\|_\infty \left(1 - \frac{1}{A^{\sigma-1}}\right) + \frac{\varepsilon}{A^{\sigma-1}}\sqrt{\frac{\sigma^2+t^2}{1+t^2}}.
\end{aligned}$$

$(\star)$ $\|\eta\|_\infty$ a bien un sens car $\eta(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On en déduit donc que : $\displaystyle\overline{\lim_{\sigma\to1^+}} \left|(\sigma-1)\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma+it}}\right| \leq \varepsilon$.

Ceci étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on a : $\displaystyle\lim_{\sigma\to1^+} (\sigma-1)\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma+it}} = 0$.

On obtient donc une contradiction avec $(\triangle)$: on en déduit ainsi (4).

$\square$

3- Démonstration du thèorème des nombres premiers

Grâce aux énoncés équivalents au théorème des nombres premiers, on peut maintenant démontrer le thèorème en lui-même.

Démonstration. On va montrer que ζ n'a pas de zéro sur la droite $\{z \in \mathbb{C}, \Re(z) = 1\}$.

On remarque tout d'abord grâce à la proposition 3 que : $\forall z \in \Omega_0, \overline{\zeta(z)} = \zeta(\overline{z})$.

Ainsi si z_0 est un zéro de ζ de multiplicité k alors $\overline{z_0}$ est aussi un zéro de ζ de multiplicité k.

On note m, la multiplicité du zéro de ζ aux points $1 \pm ib$ et n, celle du zéro de ζ aux points $1 \pm 2ib$ où $b \neq 0$.

On a vu que : $\forall z \in \Omega_1, \Phi(z) + \dfrac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(p_n)}{{p_n}^z({p_n}^z - 1)}$ et $z \mapsto -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(p_n)}{{p_n}^z({p_n}^z - 1)}$ est holomorphe sur $\Omega_{\frac{1}{2}}$.

De plus ζ a un pôle simple 1, de résidu 1.

D'où : $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon \Phi(1+\varepsilon) = 1$ et $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon \Phi(1+\varepsilon \pm ib) = -m$ et $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon \Phi(1+\varepsilon \pm 2ib) = -n$.

On définit pour tout $s > 1$, $A_s = \Phi(s+2ib) + \Phi(s-2ib) + 4\Phi(s+ib) + 4\Phi(s-ib) + 6\Phi(s)$

$$\begin{aligned}
\text{On a : } \forall s > 1, A_s &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(p_k)}{{p_k}^{s+2ib}} (1 + 4{p_k}^{ib} + 6{p_k}^{2ib} + 4{p_k}^{3ib} + {p_k}^{4ib}) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(p_k)}{{p_k}^{s+2ib}} (1 + {p_k}^{ib})^4 \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(p_k)}{{p_k}^{s}} ({p_k}^{\frac{-ib}{2}} + {p_k}^{\frac{ib}{2}})^4.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a : $\forall s > 1, \Phi(s+2ib) + \Phi(s-2ib) + 4\Phi(s+ib) + 4\Phi(s-ib) + 6\Phi(s) \geq 0$.

En appliquant l'inégalité précédente à $1+\varepsilon$ pour $\varepsilon > 0$, en la multipliant par ε et en faisant tendre ε vers 0, on a alors : $-2n - 8m + 6 \geq 0$ autrement dit $8m \leq 6 - 2n \leq 6$ autrement dit $m = 0$.

On en déduit ainsi le théorème des nombres premiers.

$\square$

III. Majoration standard de l'erreur dans le théorème des nombres premiers

Après avoir établi le théorème des nombres premiers, on cherche à connaître plus précisément le terme d'erreur. On a vu dans les énoncés équivalents au théorème des nombres premiers que connaître la fonction π revient à connaître la fonction ψ en terme d'équivalent. En fait, avoir une majoration du terme d'erreur pour ψ revient aussi à avoir une majoration du terme d'erreur pour π.

En effet, dans cette partie, on va montrer qu'on a une majoration de ψ de la forme :
$\forall x \geq 3, |\psi(x) - x| \leq Cxe^{-a\sqrt{\ln(x)}}$ où $a > 0$ et $C > 0$

On définit $J : x \mapsto \displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \pi\left(x^{\frac{1}{n}}\right)$ pour $x \geq 2$.

Cette somme est bien définie car elle est en fait fini puisque : $\pi \equiv 0$ sur $[1, 2[$ et $x^{\frac{1}{n}} \geq 2 \Leftrightarrow n \leq \dfrac{\ln(x)}{\ln(2)}$.

On a : $\forall x \geq 2,\ J(x) = \displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sum_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \leq x^{\frac{1}{n}}}} 1 = \sum_{n \geq 1} \sum_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p^n \leq x}} \frac{1}{n} = \sum_{n \geq 1} \sum_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p^n \leq x}} \frac{\ln(p)}{\ln(p^n)} = \sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{\ln(n)}$.

Par la formule sommatoire d'Abel, on a : $\forall x \geq 2, J(x) = \dfrac{\psi(x)}{\ln(x)} + \displaystyle\int_2^x \frac{\psi(t)}{t(\ln^2(t))} dt$.

On définit le logarithme intégral sur $[2, +\infty[$ par $Li : x \mapsto \displaystyle\int_2^x \frac{1}{\ln(t)} dt$.

On a : $\forall x \geq 2,\ J(x) = \dfrac{x}{\ln(x)} + \displaystyle\int_2^x \frac{1}{\ln^2(t)} dt + \frac{\psi(x) - x}{\ln(x)} + \int_2^x \frac{\psi(t) - t}{t \ln^2(t)} dt$.

Or, par intégration par parties, on a : $\forall x \geq 2,\ \dfrac{x}{\ln(x)} + \displaystyle\int_2^x \frac{1}{\ln^2(t)} dt = \int_2^x \frac{1}{\ln(t)} dt + \frac{2}{\ln(2)} = Li(x) + \frac{2}{\ln(2)}$.

Ainsi : $\forall x \geq 2,\ J(x) = Li(x) + \dfrac{2}{\ln(2)} + \dfrac{\psi(x) - x}{\ln(x)} + \displaystyle\int_2^x \frac{\psi(t) - t}{t \ln^2(t)} dt$.

Donc : $\forall x \geq 3,\ |J(x) - Li(x)| \leq \dfrac{2}{\ln(2)} + C\dfrac{x}{\ln(x)} e^{-a\sqrt{\ln(x)}} + C \displaystyle\int_2^x \frac{e^{-a\sqrt{\ln(x)}}}{\ln^2(t)} dt = O\left(xe^{-a\sqrt{\ln(x)}}\right)$.

De plus : $\forall x \geq 3,\ 0 \leq J(x) - \pi(x) = \displaystyle\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n} \pi\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = \sum_{n \leq \frac{\ln(x)}{\ln(2)}} \frac{1}{n} \pi\left(x^{\frac{1}{n}}\right) \leq \frac{\sqrt{x}}{2} \frac{\ln(x)}{\ln(2)} = O\left(xe^{-a\sqrt{\ln(x)}}\right)$.

Donc : $\forall x \geq 3,\ |\pi(x) - Li(x)| \leq |\pi(x) - J(x)| + |J(x) - Li(x)| \leq O\left(xe^{-a\sqrt{\ln(x)}}\right)$.

D'où : $\forall x \geq 3,\ \pi(x) = Li(x) + O\left(xe^{-a\sqrt{\ln(x)}}\right)$.

Ceci justifie pourquoi dans cette partie on va plutôt s'intéresser à la majoration de la fonction ψ. Pour établir cette majoration, inspirée des notes [2] et [3], on va d'abord commencer par établir des résultats plus généraux qu'on appliquera ensuite à la fonction de von Mangoldt.

1- Formule de Perron et majoration de l'erreur

Avant d'énoncer la formule de Perron, on va établir le lemme suivant.

Lemme 12.

Soit $\sigma > 1$, *on définit sur* $\mathbb{R}_+$: $\phi_T : x \mapsto \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} \frac{x^s}{s} ds$ *pour* $T > 0$

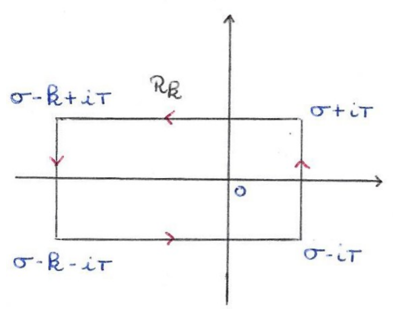
$$\phi : x \mapsto \begin{cases} 1 & si\ x > 1 \\ \dfrac{1}{2} & si\ x = 1 \\ 0 & si\ x < 1 \end{cases}.$$

On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \phi_T(x) \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} \phi(x)$ *et* $\forall\ T > 0, |\phi_T(x) - \phi(x)| \leq \dfrac{Cx^\sigma}{\max(\{1, T|\ln(x)|\})}$ $\quad$ *si* $x \neq 1$

$$\leq \frac{C'}{T} \qquad si\ x = 1$$

où C et C' sont des constantes strictement positives.

Démonstration. $\diamond$ On commence par considérer le cas $x > 1$: on fixe $T > 0$.

* 

On va appliquer le théorème des résidus à $z \mapsto \dfrac{x^z}{z}$, qui est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ ayant un unique pôle simple en 0 de résidu 1, et au contour R_k suivant pour k positif suffisamment grand pour que ce contour contienne 0.

On a alors : $2i\pi = \displaystyle\int_{R_k} \frac{x^z}{z} dz = \int_{\sigma-k-iT}^{\sigma-iT} \frac{x^z}{z} dz + \int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} \frac{x^z}{z} dz + \int_{\sigma+iT}^{\sigma-k+iT} \frac{x^z}{z} dz + \int_{\sigma-k+iT}^{\sigma-k-iT} \frac{x^z}{z} dz.$

On cherche maintenant à majorer les intégrales sur les trois autres côtés du rectangle R_k.

. $\left|\int_{\sigma+iT}^{\sigma-k+iT}\frac{x^z}{z}dz\right| \leq \frac{x^\sigma}{T}\int_0^k \frac{1}{x^t}dt \leq \frac{x^\sigma}{T\ln(x)}\left(1-\frac{1}{x^k}\right) \leq \frac{x^\sigma}{T\ln(x)}$ car $x > 1$.

. $\left|\int_{\sigma-k-iT}^{\sigma-iT}\frac{x^z}{z}dz\right| \leq \frac{x^{\sigma-k}}{T}\int_0^k x^t dt \leq \frac{x^{\sigma-k}}{T\ln(x)}(x^k-1) \leq \frac{x^\sigma}{T\ln(x)}$ car $x > 1$.

. $\left|\int_{\sigma-k+iT}^{\sigma-k-iT}\frac{x^z}{z}dz\right| \leq 2T\sup_{t\in[-T,T]}\left|\frac{x^{\sigma-k-it}}{\sigma-k-it}\right| \leq 2T\frac{x^{\sigma-k}}{k-\sigma}$.

$$\text{Ainsi, on en déduit que : } |\phi_T(x)-1| \leq \frac{1}{2\pi}\left(\left|\int_{\sigma+iT}^{\sigma-k+iT}\frac{x^z}{z}dz\right|+\left|\int_{\sigma-k-iT}^{\sigma-iT}\frac{x^z}{z}dz\right|+\left|\int_{\sigma-k+iT}^{\sigma-k-iT}\frac{x^z}{z}dz\right|\right)$$
$$\leq \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2x^\sigma}{T\ln(x)}+2T\frac{x^{\sigma-k}}{k-\sigma}\right).$$

En faisant tendre k vers $+\infty$, on obtient alors : $|\phi_T(x)-1| \leq \dfrac{x^\sigma}{T\pi\ln(x)}$.

Ceci étant valable pour tout $T > 0$, on en déduit que : $\phi_T(x) \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

$*$ On veut maintenant un autre moyen de majorer $|\phi_T(x)-1|$ pour tout $T > 0$.

On a : $\displaystyle\int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT}\frac{x^z}{z}dz = \int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT}\frac{x^z-x^\sigma}{z}dz + x^\sigma\int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT}\frac{1}{z}dz.$

. Or : $\displaystyle\int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT}\frac{1}{z}dz = \int_{-T}^{T}\frac{i}{\sigma+it}dt$

$$= i\int_{-T}^{T}\frac{\sigma-iT}{\sigma^2+t^2}dt$$
$$= \frac{i}{\sigma}\int_{-T}^{T}\frac{1}{1+\left(\frac{t}{\sigma}\right)^2}dt + \frac{1}{2}\int_{-T}^{T}\frac{2t}{\sigma^2+t^2}dt$$
$$= 2i\arctan\left(\frac{T}{\sigma}\right) \qquad \text{car } t\mapsto\frac{2t}{\sigma^2+t^2} \text{ est intégrable sur } [-T,T] \text{ et est impaire.}$$

Donc : $\displaystyle 1-\frac{x^\sigma}{2i\pi}\int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT}\frac{1}{z}dz = 1-\frac{x^\sigma}{\pi}\arctan\left(\frac{T}{\sigma}\right).$

. Par ailleurs : $\displaystyle\left|\int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT}\frac{x^z-x^\sigma}{z}dz\right| \leq x^\sigma|\ln(x)|\int_{-T}^{T}\left|\frac{x^{it}-1}{it\ln(x)}\right|dt \leq 2Tx^\sigma|\ln(x)|\left|\int_0^1 e^{iut\ln(x)}du\right| \leq 2Tx^\sigma|\ln(x)|.$

Ainsi : $\displaystyle\left|1-\frac{1}{2i\pi}\int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT}\frac{x^z}{z}dz\right| \leq \left|1-\frac{x^\sigma}{2i\pi}\int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT}\frac{1}{z}dz\right| + \left|\int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT}\frac{x^z-x^\sigma}{z}dz\right| \leq x^\sigma+\frac{x^\sigma}{\pi}|\ln(x)|.$

Donc : $|\phi_T(x) - 1| \leq \dfrac{x^\sigma}{\pi} \min\left(\left\{\pi + T|\ln(x)|, \dfrac{1}{T|\ln(x)|}\right\}\right) \leq \dfrac{x^\sigma}{\pi} \min\left(\left\{\alpha, \dfrac{1}{T|\ln(x)|}\right\}\right)$
où $\alpha = \pi + u_0 = \dfrac{1}{u_0}$ et $u_0 > 0$.

De plus u_0 est solution de $u + u\pi - 1 = 0$ et $u_0 > 0$.
Le discriminant de cette équation est $\Delta = \pi^2 + 4 > 0$ et les solutions sont donc : $u_\pm = \dfrac{-\pi \pm \sqrt{\pi^2+4}}{2}$.

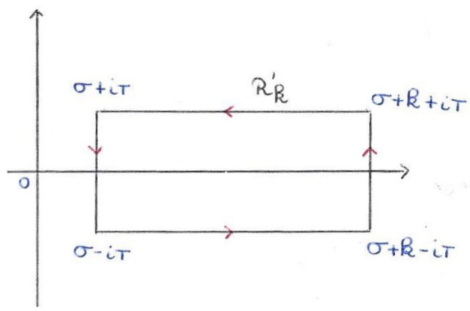
Or : $\alpha = \dfrac{1}{u_0} = \dfrac{1}{u_+} = -u_- = \dfrac{\pi + \sqrt{\pi^2+4}}{2} \leq \pi + 1 \leq \dfrac{9}{2}$.

Ainsi : $\forall x > 1, \forall T > 0, |\phi_T(x) - 1| \leq \dfrac{x^\sigma}{\pi} \min\left(\left\{\dfrac{9}{2}, \dfrac{1}{T|\ln(x)|}\right\}\right) \leq \dfrac{9x^\sigma}{2\pi} \min\left(\left\{1, \dfrac{1}{T|\ln(x)|}\right\}\right) = \dfrac{9x^\sigma}{2\pi \max\left(\{1, T|\ln(x)|\}\right)}$.

En posant $C = \dfrac{9}{2\pi}$, on a le résultat.

$\diamond$ On considère maintenant le cas $x < 1$: on fixe $T > 0$.

$*$



Comme dans le cas précédent, on va appliquer le théorème des résidus à $z \mapsto \dfrac{x^z}{z}$ et au contour R'_k suivant pour $k \geq 0$, qui ne contient pas 0.

Par un raisonnement similaire à ce qui précède, on obtient : $|\phi_T(x)| \leq \dfrac{x^\sigma}{\pi T|\ln(x)|}$.

Ceci étant valable pour tout $T > 0$, on en déduit que : $\phi_T \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

$*$ On veut maintenant un autre moyen de majorer $|\phi_T(x)|$ pour tout $T > 0$.

De même que précédemment, on a :
$$\begin{aligned}|\phi_T(x)| &\leq \left|\frac{x^\sigma}{2i\pi}\int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} \frac{1}{z}dz\right| + \left|\frac{1}{2i\pi}\int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} \frac{x^z - x^\sigma}{z}dz\right| \\ &\leq \frac{x^\sigma}{\pi}\arctan\left(\frac{T}{\sigma}\right) + \frac{T}{\pi}x^\sigma|\ln(x)| \\ &\leq \frac{x^\sigma}{\pi}(\pi + T|\ln(x)|).\end{aligned}$$

Ainsi : $\forall x < 1, \forall T > 0, |\phi_T(x)| \leq \dfrac{x^\sigma}{\pi} \min\left(\left\{\pi + T|\ln(x)|, \dfrac{1}{T|\ln(x)|}\right\}\right) \leq \dfrac{9x^\sigma}{2\pi \max\left(\{1, T|\ln(x)|\}\right)}$.

En posant $C = \dfrac{9}{2\pi}$, on a le résultat.

$\diamond$ On considère pour finir le cas $x = 1$: on fixe $T > 0$.

$*$ Par ce qui précède, on a : $\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT}\frac{1}{z}dz = \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{T}{\sigma}\right)$.

Ceci étant valable pour tout $T > 0$, on en déduit que : $\phi_T(1) \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$.

$*$ De plus : $\forall\, T > 0, \left|\phi_T(1) - \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{\pi}\left[\dfrac{\pi}{2} - \arctan\left(\dfrac{T}{\sigma}\right)\right] = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{\frac{T}{\sigma}}^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}dt \leq \frac{1}{\pi}\int_{\frac{T}{\sigma}}^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt = \frac{\sigma}{T\pi}$.

En posant $C' = \dfrac{\sigma}{\pi}$, on a le résultat.

$\square$

On peut donc maintenant énoncer puis démontrer la formule de Perron, ainsi que s'intéresser à la majoration de l'erreur dans cette dernière.

Proposition 13 (Formule de Perron)**.**

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ *tel que* $f(n) \underset{n\to+\infty}{=} O\left(n^{o(1)}\right)$ *et* $D_f : z \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{f(n)}{n^z}$ *définie sur* Ω_1.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*\backslash\mathbb{N}^*$ *et* $\sigma > 1$*, on a :*

$$\sum_{n\leq x} f(n) = \frac{1}{2i\pi}\lim_{T\to+\infty}\int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} D_f(z)\frac{x^z}{z}dz.$$

Démonstration. $\diamond$ La série définissant D_f est bien définie.

En effet, par hypothèse : $\forall\varepsilon > 0, \forall z = \sigma + it \in \Omega_1, \dfrac{f(n)}{n^z} \underset{n\to+\infty}{=} O_\varepsilon\left(\dfrac{1}{n^{\sigma-\varepsilon}}\right)$.

On choisit ε suffisamment petit tel que pour $z = \sigma + it \in \Omega_1$, $\sigma - \varepsilon > 1$.

Dans ce cas $\left(\dfrac{1}{n^{\sigma-\varepsilon}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est le terme général d'une série convergente et la série est bien définie.

$\diamond$ Soit $\sigma > 1$ et $x \in \mathbb{R}_+^*\backslash\mathbb{N}^*$: on fixe $T > 0$.

On a : $\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} D_f(z)\frac{x^z}{z}dz = \frac{1}{2i\pi}\int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{f(n)}{z}\frac{x^z}{n^z}dz$.

Or : $\left|\frac{1}{2i\pi}\int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT}\frac{f(n)}{z}\frac{x^z}{n^z}dz\right| \leq \frac{T}{\pi}|f(n)|\sup_{t\in[-T,T]}\left|\frac{x^{\sigma+it}}{n^{\sigma+it}(\sigma+it)}\right| \leq \frac{T}{\pi\sigma}x^\sigma\frac{|f(n)|}{n^\sigma}$.

De plus : $\left(\frac{T}{\pi\sigma}x^\sigma\frac{f(n)}{n^\sigma}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est le terme général d'une série absolument convergente.

On peut alors inverser somme et intégrale et on a donc : $\frac{1}{2i\pi}\int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT}D_f(z)\frac{x^z}{z}dz = \frac{1}{2i\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}f(n)\int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT}\frac{1}{z}\frac{x^z}{n^z}dz$.

Ainsi :
$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2i\pi}\int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT}D_f(z)\frac{x^z}{z}dz-\sum_{n\leq x}f(n)\right| &\leq \sum_{n=1}^{+\infty}|f(n)|\left|\phi_T\left(\frac{x}{n}\right)-\phi\left(\frac{x}{n}\right)\right| && \text{car } x\notin\mathbb{N}^*\\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|f(n)|Cx^\sigma}{n^\sigma\max\left(\left\{1,T\left|\ln\left(\frac{x}{n}\right)\right|\right\}\right)} && \text{par le lemme précédent.}\end{aligned}$$

En particulier, on a : $\left|\frac{1}{2i\pi}\int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT}D_f(z)\frac{x^z}{z}dz-\sum_{n\leq x}f(n)\right| \leq \frac{Cx^\sigma}{T}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|f(n)|}{n^\sigma\left|\ln\left(\frac{x}{n}\right)\right|}$.

Par ailleurs, on a par hypothèse : $\forall\varepsilon>0, \frac{f(n)}{n^\sigma\ln\left(\frac{x}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{=} O_\varepsilon\left(\frac{1}{n^{\sigma-\varepsilon}\ln(n)}\right)$.

En choisissant ε suffisamment petit tel que $\sigma-\varepsilon>1$, $\left(\frac{1}{n^{\sigma-\varepsilon}\ln(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est le terme général d'une série convergente.

Ainsi, $\sum_n\frac{f(n)}{n^\sigma\ln\left(\frac{x}{n}\right)}$ est abolument convergente et en faisant tendre T vers $+\infty$ on obtient alors le résultat.

□

Proposition 14 (Majoration de l'erreur dans la formule de Perron)**.**

Soit $f:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$ *tel que* $f(n)\underset{n\to+\infty}{=}O(\ln(n))$ *et* $D_f : z\mapsto\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{f(n)}{n^z}$ *définie sur* Ω_1.

On a alors pour $T\geq 2$ *et* $x\geq T$ *:*
$$\sum_{n\leq x}f(n)=\frac{1}{2i\pi}\int_{1+\frac{1}{\ln(x)}-iT}^{1+\frac{1}{\ln(x)}+iT}D_f(z)\frac{x^z}{z}dz+O\left(\frac{x\ln^2(xT)}{T}\right).$$

Démonstration. On fixe $T \geq 2$ et $x \geq T$ et on considère $\sigma > 1$.

Par hypothèse, il existe $M > 0$ tel que : $\forall n \geq 1, |f(n)| \leq M \ln(n)$.

De plus, comme $\ln(n) \underset{n \to +\infty}{=} O\left(n^{o(1)}\right)$, on remarque que f vérifie les hypothèses de la proposition précédente.

On pose $R(x,T) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|f(n)|x^\sigma}{n^\sigma \max\left(\left\{1, T\left|\ln\left(\frac{x}{n}\right)\right|\right\}\right)}$.

On a vu dans la démonstration de la proposition précédente que : $\displaystyle\left|\frac{1}{2i\pi}\int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} D_f(z)\frac{x^z}{z}dz - \sum_{n\leq x} f(n)\right| \leq CR(x,T)$.

Pour montrer le résultat attendu, il suffit de montrer que $R(x,T) = O\left(\frac{x}{T}\ln^2(xT)\right)$.

$$\text{On a : } R(x,T) \leq \sum_{\substack{n\geq 1 \\ \left|\ln\left(\frac{x}{n}\right)\right|\geq 1}} \frac{|f(n)|x^\sigma}{n^\sigma T} + \sum_{\substack{n\geq 1 \\ \left|\ln\left(\frac{x}{n}\right)\right|< 1}} \frac{|f(n)|x^\sigma}{n^\sigma \max\left(\left\{1, T\left|\ln\left(\frac{x}{n}\right)\right|\right\}\right)}$$
$$\leq \frac{x^\sigma}{T}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|f(n)|}{n^\sigma} + \sum_{\frac{x}{e}<n<xe} \frac{|f(n)|x^\sigma}{n^\sigma \max\left(\left\{1, T\left|\ln\left(\frac{x}{n}\right)\right|\right\}\right)}.$$

On veut montrer que les deux sommes sont en $O\left(\frac{x}{T}\ln^2(xT)\right)$.

$\diamond$ On pose $S(x,T) = \displaystyle\sum_{\frac{x}{e}<n<xe} \frac{|f(n)|x^\sigma}{n^\sigma \max\left(\left\{1, T\left|\ln\left(\frac{x}{n}\right)\right|\right\}\right)}$.

$$\text{On a : } S(x,T) \leq \sum_{\frac{x}{e}<n<xe} \frac{M\ln(n)x^\sigma}{n^\sigma \max\left(\left\{1, T\left|\ln\left(\frac{x}{n}\right)\right|\right\}\right)} \leq M\ln(ex)e^\sigma \sum_{\frac{x}{e}<n<xe} \frac{1}{\max\left(\left\{1, T\left|\ln\left(\frac{x}{n}\right)\right|\right\}\right)}.$$

On va couper cette somme sur les trois parties suivantes : $]\frac{x}{e}, xe^{-\frac{1}{T}}[$; $]xe^{-\frac{1}{T}}, xe^{\frac{1}{T}}[$ et $]xe^{\frac{1}{T}}, xe[$.

$$* \text{ On a : } \sum_{\frac{x}{e}<n<xe^{-\frac{1}{T}}} \frac{1}{T\max\left(\left\{1, T\left|\ln\left(\frac{x}{n}\right)\right|\right\}\right)} \leq 1 + \sum_{\frac{x}{e}<n<xe^{-\frac{1}{T}}-1} \frac{1}{T\ln\left(\frac{x}{n}\right)} \leq 1 + \int_{\frac{x}{e}}^{xe^{-\frac{1}{T}}} \frac{1}{T\ln\left(\frac{x}{u}\right)}du.$$

$$\text{D'où : } \sum_{\frac{x}{e}<n<xe^{-\frac{1}{T}}} \frac{1}{T\ln\left(\frac{x}{n}\right)} \underset{v=\ln\left(\frac{x}{u}\right)}{=} 1 + \int_{\frac{1}{T}}^{1}\frac{xe^{-v}}{Tv}dv \leq 1 + \int_{\frac{1}{T}}^{1}\frac{1}{Tv}dv \leq 1 + \frac{x\ln(T)}{T}.$$

$*$ En faisant de même une comparaison série intégrale, on en déduit que :

$$\sum_{xe^{\frac{1}{T}}<n<xe} \frac{1}{T\max\left(\left\{1, T\left|\ln\left(\frac{x}{n}\right)\right|\right\}\right)} \leq 1 + \frac{xe\ln(T)}{T}.$$

$$* \sum_{xe^{-\frac{1}{T}}<n<xe^{\frac{1}{T}}} \frac{1}{T\max\left(\left\{1, T\left|\ln\left(\frac{x}{n}\right)\right|\right\}\right)} \leq 1 + \sum_{xe^{-\frac{1}{T}}<n<xe^{\frac{1}{T}-1}} 1 = 1 + x(e^{\frac{1}{T}} - e^{-\frac{1}{T}}) \leq 1 + \frac{Cx}{T} \text{ où C est une constante.}$$

Ainsi : $S(x,T) \leq M\ln(ex)e^{\sigma}\left(3 + \frac{x\ln(T)}{T} + \frac{ex\ln(T)}{T} + \frac{Cx}{T}\right) \leq \frac{C'x\ln^2(xT)}{T}$ où C' est une constante car $x > T$.

$\diamond$ De plus : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|f(n)|}{n^{\sigma}} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n^{\sigma}} = \frac{\ln(2)}{2^{\sigma}} + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n^{\sigma}} \leq 1 + \int_2^{+\infty} \frac{\ln(u)}{u^{\sigma}}du \leq 1 + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(u)}{u^{\sigma}}du.$

D'où : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|f(n)|}{n^{\sigma}} \underset{v=\ln(u)}{=} 1 + \int_0^{+\infty} ve^{-(\sigma-1)v}dv = 1 + \frac{1}{(\sigma-1)^2}.$

En prenant $\sigma = 1 + \frac{1}{\ln(x)}$, on a alors :

$R(x,T) \leq \frac{ex}{T}M(1+\ln^2(x)) + C'\frac{x\ln^2(xT)}{T} \leq K\frac{x\ln^2(xT)}{T}$ où K est une constante.

$\square$

2- Application à la fonction de von Mangoldt

On remarque qu'on peut appliquer le paragraphe précédent à la fonction Λ qui vérifie bien les hypothèses des propositions précédentes. De plus, on a vu dans la partie II que $D_{\Lambda} = -\frac{\zeta'}{\zeta}$.

On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* \backslash \mathbb{N}^*$ et $\sigma > 1$, $\psi(x) = \frac{1}{2i\pi} \lim_{T \to +\infty} \int_{\sigma - iT}^{\sigma + iT} -\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\frac{x^z}{z}dz$.

De plus, pour $T \geq 2$ et $x > T$, on a : $\psi(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{1+\frac{1}{\ln(x)}-iT}^{1+\frac{1}{\ln(x)}+iT} -\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\frac{x^z}{z}dz + O\left(\frac{x\ln(xT)^2}{T}\right)$. (1)

a) Formule explicite de la fonction de von Mangoldt tronquée

On va commencer par énoncer des propositions plus générales qui seront utiles pour montrer la formule explicite de la fonction de von Mangoldt tronquée, résultat central pour trouver la majoration standard de la fonction ψ. Les démonstrations des deux théorèmes suivants seront faites en annexe.

Théorème 15 (Formule de Jensen)**.**

Soit f, une fonction méromorphe sur un disque $D(z_0, r)$ où z_0 n'est ni un zéro, ni un pôle de f et $r > 0$.

On a alors :

$$\ln|f(z_0)| = \int_0^1 \ln|f(z_0 + re^{2i\pi t})|dt + \sum_{\substack{\rho \in Z_f \\ |\rho - z_0| \leq r}} \ln\left(\frac{|\rho - z_0|}{r}\right) - \sum_{\substack{\xi \in P_f \\ |\xi - z_0| \leq r}} \ln\left(\frac{|\xi - z_0|}{r}\right).$$

Théorème 16.

Soit f, une fonction holomorphe sur un disque $D(z_0, r)$ où z_0 n'est pas un zéro de f et $r > 0$.

On suppose de plus que : $\star$ *f n'est pas identiquement nulle sur D_r ;*
$\star\, \exists M \geq 1, \forall z \in \mathcal{C}(z_0, r), |f(z)| \leq M|f(z_0)|$.

On fixe des constantes c_1 et c_2 telles que : $0 < c_2 < c_1 < 1$.

On a alors pour tout $z \in \{w \in \mathbb{C}, |w - z_0| \leq c_2 r\}$ tel que z ne soit pas un zéro de f :

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{\substack{\rho \in Z_f \\ |\rho - z_0| \leq c_1 r}} \frac{1}{z - \rho} + O_{c_1, c_2}\left(\frac{\ln(M)}{r}\right).$$

Remarque. La constante M du théorème est nécessairement plus grande que 1 par le principe du maximum.

En effet, par hypothèse, on a : $\forall z \in \mathcal{C}(z_0, r), |f(z)| \leq M|f(z_0)|$.

Le principe du maximum dit que cette relation reste vraie sur le disque $D(z_0, r)$ et donc en particulier en z_0.

On va ensuite montrer un résultat qui sera très utile dans la suite.

Proposition 17. *Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(z) \geq \varepsilon$ et $|z - 1| \geq \varepsilon$, on a : $\ln|\zeta(z)| \leq O_\varepsilon(\ln(2 + |z|))$.*

Démonstration. D'après la proposition 3, on a : $\forall z \in \Omega_0 \backslash \{1\}, \forall x \geq 1, \zeta(z) = \dfrac{z}{z-1} - z \displaystyle\int_1^{+\infty} (t - \lfloor t \rfloor) \frac{1}{t^{1+z}} dt$.

D'où : $\forall z \in \Omega_0 \backslash \{1\}$,
$$\begin{aligned} \left|\zeta(z) - \frac{1}{z-1}\right| &= \left|1 - z \int_1^{+\infty} (t - \lfloor t \rfloor) \frac{1}{t^{1+z}} dt\right| \\ &\leq |z| \int_1^{+\infty} (\lfloor t \rfloor - t + 1) \frac{1}{t^{1+\Re(z)}} dt \\ &\leq \frac{|z|}{\Re(z)}. \end{aligned}$$

Donc : $\forall z \in \Omega_1 \backslash \{1\}, \Re(z) \geq \varepsilon$ et $|z-1| \geq \varepsilon \Rightarrow |\zeta(z)| \leq \dfrac{1}{\varepsilon}(2+|z|)$.

Ainsi : $\forall z \in \Omega_1 \backslash \{1\}, \Re(z) \geq \varepsilon$ et $|z-1| \geq \varepsilon \Rightarrow \ln|\zeta(z)| \leq \ln\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right) + \ln(2+|z|) \leq O_\varepsilon(\ln(2+|z|))$.

$\square$

Proposition 18 (Majoration du nombre de zéros de la fonction ζ)**.**

Pour tout $\varepsilon > 0$ et $t_0 \in \mathbb{R}$, il y a au plus $O_\varepsilon(\ln(2+|t_0|))$ zéros ρ de ζ comptés avec leur multiplicité dans la région $\{\sigma + it, \varepsilon \leq \sigma \leq 1, |t-t_0| \leq 1\}$.

Démonstration. On peut supposer sans perte de généralité que $\varepsilon < \dfrac{1}{2}$.

On peut supposer de plus que $|t_0| \geq 10$ par exemple car si $|t_0| < 10$, on a le résultat comme une fonction méromorphe a un nombre fini de zéros dans un compact.

On considère alors le disque centré en $2 + it_1$ de rayon $2 - \dfrac{\varepsilon}{2}$ où $t_1 \in [t_0 - 2, t_0 + 2]$.

Par la formule de Jensen appliquée à ζ, on a :

$$\ln|\zeta(2+it_1)| = \int_0^1 \ln\left|\zeta(2+it_1 + \left(2 - \frac{\varepsilon}{2}\right)e^{2i\pi t}\right| dt + \sum_{\substack{\rho \in Z_\zeta \\ |\rho - 2 - it_1| \leq 2 - \frac{\varepsilon}{2}}} \ln\left(\frac{|\rho - 2 - it_1|}{2 - \frac{\varepsilon}{2}}\right). \qquad (2)$$

Pour avoir le résultat, il suffit de montrer qu'il y a au plus $O_\varepsilon(\ln(2+|t_0|))$ zéros de ζ dans le disque centré en $2+it_1$ et de rayon $2 - \dfrac{3\varepsilon}{4}$ car on peut recouvrir la région $\{\sigma + it, \varepsilon \leq \sigma \leq 1, |t-t_0| \leq 1\}$ par un $O_\varepsilon(1)$ de ce genre de disques.

Pour cela, on cherche une majoration de l'intégrale et du terme $\ln|\zeta(2+it_1)|$.

$\diamond$ On va d'abord s'intéresser à la majoration de $\ln|\zeta(2+it_1)|$.

$*$ Par la proposition 17, on a : $\forall \sigma > 1, \left|\zeta(\sigma) - \dfrac{1}{\sigma - 1}\right| \leq 1$ autrement dit : $\forall \sigma > 1, \zeta(\sigma) = \dfrac{1}{\sigma-1} + O(1)$.

En particulier : $\forall z \in \Omega_1, |\zeta(z)| \leq \zeta(\Re(z)) = \dfrac{1}{\Re(z) - 1} + O(1)$.

$*$ On cherche une majoration du même type pour $\dfrac{1}{|\zeta|}$: pour cela, on introduit la fonction de Möbius $\mu : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$.

Elle est définie par : $\mu(n) = \begin{cases} 0 \text{ si n est divisible par un carré parfait différent de 1} \\ 1 \text{ si n est produit d'un nombre pair de premiers distincts} \\ -1 \text{ si n est produit d'un nombre impair de premiers distincts} \end{cases}$.

. On veut montrer que : $\forall z \in \Omega_1, \dfrac{1}{\zeta(z)} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n^z}$.

- On remarque tout d'abord que $\dfrac{1}{\zeta}$ a bien un sens car ζ ne s'annule pas sur Ω_1.

De plus, la série est bien définie sur Ω_1 car : $\forall n \geq 1, \forall z \in \Omega_1, \left|\dfrac{\mu(n)}{n^z}\right| \leq \dfrac{1}{n^{\Re(z)}}$ et $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n^{\Re(z)}}$ converge sur Ω_1.

- On a : $\forall z \in \Omega_1, \left(\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n^z}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{n^z}$.

Par ailleurs, si $n > 1$, on note $\mathcal{P}_n$, l'ensemble des facteurs premiers de n et s_n, le cardinal de $\mathcal{P}_n$.

On a alors : $\displaystyle\sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{\mathcal{D}_n \subset \mathcal{P}_n} (-1)^{|\mathcal{D}_n|} = \sum_{k=0}^{s_n} (-1)^k |\{\mathcal{D}_n \subset \mathcal{P}_n, |\mathcal{D}_n| = k\}| = \sum_{k=0}^{s_n} (-1)^k \binom{s_n}{k} = 0$.

On en déduit alors que : $\forall z \in \Omega_1, \left(\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n^z}\right) = \mu(1) = 1$ autrement dit : $\forall z \in \Omega_1, \dfrac{1}{\zeta(z)} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n^z}$.

. Par ce qui précède, on a : $\forall z \in \Omega_1, \left|\dfrac{1}{\zeta(z)}\right| \leq \zeta(\Re(z)) = \dfrac{1}{\Re(z) - 1} + O(1)$.

Avec ces deux majorations, on obtient que : $\ln|\zeta(2 + it_1)| = O(1) = O(\ln(2 + t_0))$.

$\diamond$ On s'intéresse maintenant à la majoration de l'intégrale : pour cela on considère z sur le bord du disque.

On cherche à appliquer la proposition 17 : il faut donc vérifier qu'on a bien les hypothèses de la proposition.

On a : $2 - \dfrac{\varepsilon}{2} = |z - 2 - it_1| \geq 2 - \Re(z)$ d'où : $\Re(z) \geq \dfrac{\varepsilon}{2}$.

De plus : $|z - 1| \geq |1 + it_1| - |z - 2 - it_1| \geq |t_1| - 2 + \dfrac{\varepsilon}{2} \geq |t_0| - 4 + \dfrac{\varepsilon}{2} \geq \dfrac{\varepsilon}{2}$ car $|t_0| \geq 10$.

Ainsi, par la proposition 17, on a : $\ln|\zeta(z)| \leq O_\varepsilon(\ln(2 + |z|))$.

De plus : $\ln(2 + |z|) = O_\varepsilon(\ln(2 + |t_0|))$ car $|z| \leq |z - 2 - it_1| + |2 + it_1| \leq 4 + |t_1| \leq 5 + |t_0|$.

En utilisant ces majorations dans la formule (2), on a alors : $-\displaystyle\sum_{\substack{\rho \in Z_\zeta \\ |\rho - 2 - it_1| \leq 2 - \frac{\varepsilon}{2}}} \ln\left(\frac{|\rho - 2 - it_1|}{2 - \frac{\varepsilon}{2}}\right) \leq O_\varepsilon(\ln(2 + |t_0|))$.

On voit alors qu'on a au plus $O_\varepsilon(\ln(2 + |t_0|))$ zéros de ζ dans le disque $D(2 + it_1, 2 - \dfrac{3\varepsilon}{4})$ car $2 - \dfrac{3\varepsilon}{4} < 2 - \dfrac{\varepsilon}{2}$.

$\square$

Remarque. Comme ζ n'a pas de zéros sur Ω_1, on déduit de cette proposition qu'on a au plus $O_{C,\varepsilon}(\ln(2+|t_0|))$ zéros de ζ dans la région $\{\sigma+it, \varepsilon \leq \sigma \leq C, |t-t_0| \leq 1\}$ où $t_0 \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon, C > 0$.

Proposition 19. *Pour tout $C, \varepsilon > 0$ et pour tout $z = \sigma + it$ tel que $t \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \leq \sigma \leq C$, $z \neq 1$ et $\zeta(z) \neq 0$, on a :*

$$-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = -\sum_{\substack{\rho \in Z_\zeta \\ |z-\rho| \leq \frac{\varepsilon}{2}}} \frac{1}{z-\rho} + \frac{1}{z-1} + O_{C,\varepsilon}(\ln(2+|t|)).$$

Démonstration. $\diamond$ On peut supposer sans perte de généralité que $\varepsilon \leq 2$.

En effet, si $\varepsilon > 2$, comme ζ ne s'annule pas sur Ω_1, il reste à montrer que : $-\dfrac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \dfrac{1}{z-1} + O_{C,\varepsilon}(\ln(2+|t|))$.

On remarque grâce au théorème de dérivation sous le signe somme que : $\forall z \in \Omega_1, -\zeta'(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n^z}$.

En effet, on a :

— $f : z \mapsto \dfrac{1}{n^z}$ est une fonction holomorphe sur Ω_1 pour tout $n \geq 1$ et : $\forall z \in \Omega_1, f'(z) = -\dfrac{\ln(n)}{n^z}$;
— Soit K, un compact de Ω_1 : il existe $\eta > 0$ tel que : $\forall z \in K, \Re(z) \geq 1+\eta$.

De plus, on a : $\forall z \in K, \forall n \geq 1, \left|\dfrac{\ln(n)}{n^z}\right| \leq \dfrac{\ln(n)}{n^{1+\eta}}$.

Comme $\eta > 0$, $\left(\dfrac{\ln(n)}{n^{1+\eta}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est le terme général d'une série convergente, positive et indépendante de z.

On en déduit qu'on peut dériver termes à termes la série qui définie ζ sur Ω_1.

De plus, en comparant série et intégrale, on a :

$$\forall \sigma > 1, \left|\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n^\sigma} - \frac{1}{(\sigma-1)^2}\right| = \left|\frac{\ln(2)}{2^\sigma} + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n^\sigma} - \int_1^{+\infty} \frac{\ln(u)}{u^\sigma}\right| \leq 1 + \int_1^2 \frac{\ln(u)}{u^\sigma} du \leq 1 + \int_1^2 \frac{\ln(u)}{u} du \leq 2.$$

Ainsi : $\forall \sigma > 1, -\zeta'(\sigma) = \dfrac{1}{(\sigma-1)^2} + O(1)$ et on a vu que : $\forall \sigma > 1, \zeta(\sigma) = \dfrac{1}{\sigma-1} + O(1)$.

D'où : $\forall \sigma > 1, \left|-\dfrac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} - \dfrac{1}{\sigma-1}\right| \leq \dfrac{1}{|\zeta(\sigma)|}\left|-\zeta'(\sigma) - \dfrac{1}{(\sigma-1)^2}\right| + \dfrac{1}{|\zeta(\sigma)(\sigma-1)|}\left|\zeta(\sigma) - \dfrac{1}{\sigma-1}\right|$.

Or , par comparaison série intégrale, on a : $\forall \sigma > 1, \zeta(\sigma) \geq \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^\sigma} du = \frac{1}{\sigma-1}$ et : $\forall \sigma > 1, \zeta(\sigma) \geq 1$.

On en conclut donc que : $\forall \sigma > 1, -\dfrac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} = \dfrac{1}{\sigma-1} + O(1)$.

Ainsi : $\forall z \in \Omega_1, \left|-\dfrac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\right| = \left|\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^z}\right| \leq \dfrac{\zeta'(\Re(z))}{\zeta(\Re(z))} = \dfrac{1}{\Re(z)-1} + O(1)$.

D'où : $\forall z \in \Omega_1, \left| -\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} - \frac{1}{z-1} \right| \leq \frac{2}{\Re(z)-1} + O(1)$.

Donc : $\forall z \in \Omega_1, \Re(z) \geq \varepsilon \Rightarrow -\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \frac{1}{z-1} + O_\varepsilon(1) = \frac{1}{z-1} + O_\varepsilon(\ln(2+|t|))$.

$\diamond$ On considère $f : z \mapsto (z-1)\zeta(z)$ pour retirer le pôle simple de ζ en 1 : f est donc holomorphe sur Ω_0 par la proposition 3 et on voit facilement que pour tout $z \in \Omega_0 \backslash \{1\}$, $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} + \frac{1}{z-1}$.

On cherche donc maintenant à prouver que :
$\forall z = \sigma + it, f(z) \neq 0 \ et\ \varepsilon \leq \sigma \leq C\ et\ t \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{\substack{\rho \in Z_\zeta \\ |z-\rho| \leq \frac{\varepsilon}{2}}} \frac{1}{z-\rho} + O_{C,\varepsilon}(\ln(2+|t|))$.

Pour cela, on considère le disque centré en $2+it$ et de rayon $2-\frac{\varepsilon}{4}$ où $t \in \mathbb{R}$.

$*$ On veut appliquer la théorème 16 à f : il faut donc vérifier les hypothèses du théorème.

. f est une fonction holomorphe sur ce disque comme produit de fonctions holomorphes et ne s'annule pas identiquement dessus.

. On sait que : $\forall z \in \Omega_1 \backslash \{1\}, \left| \zeta(z) - \frac{1}{z-1} \right| \leq \frac{|z|}{\Re(z)}$.

Donc, pour z sur le bord de ce disque, on a par inégalité triangulaire :
$|f(z)| \leq 1 + \frac{|z||z-1|}{\Re(z)} \leq C_\varepsilon (2+|t|)^4$ où C_ε est une constante.
Par ailleurs : $\frac{1}{|\zeta(2+it)|} = \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n^{2+it}} \right| \leq \zeta(2) \leq 2$ d'où : $|f(2+it)| \geq |\zeta(2+it)| \geq \frac{1}{2}$.

Ainsi, pour tout z sur le bord du disque, on a : $|f(z)| \leq \tilde{C}_\varepsilon (2+|t|)^4 |f(2+it)|$ où $\tilde{C}_\varepsilon$ est une constante.

Par le théorème 16, on a : $\forall z \in \mathbb{C}, |z-(2+it)| \leq 2 - \frac{5\varepsilon}{6}\ et\ f(z) \neq 0 \Rightarrow \frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{\substack{\rho \in Z_f \\ |\rho-2-it| \leq 2-\frac{\varepsilon}{3}}} \frac{1}{z-\rho} + O_\varepsilon(\ln(\tilde{C}_\varepsilon(2+|t|)^4))$.
où c_1, c_2 sont tels que $c_2(2-\frac{\varepsilon}{4}) = 2 - \frac{5\varepsilon}{6}$ et $c_1(2-\frac{\varepsilon}{4}) = 2 - \frac{\varepsilon}{3}$: ils vérifient bien $0 < c_2 < c_1 < 1$.

De plus : $\forall \rho \in Z_\zeta, |\rho - 2 - it| \leq 2 - \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow \frac{\varepsilon}{3} \leq \Re(\rho) \leq 4 - \frac{\varepsilon}{3}$ et $|\Im(\rho) - t| \leq 2$.

Par la proposition 18, on a au plus $O_\varepsilon(\ln(2+|t|))$ zéros de ζ dans la région $\{z \in \mathbb{C}, \frac{\varepsilon}{3} \leq \Re(z) \leq 4 - \frac{\varepsilon}{3}, |\Im(z) - t| \leq 1\}$ et au plus $O_\varepsilon(\ln(2+|t-1|))$ zéros de ζ dans la région $\{z \in \mathbb{C}, \frac{\varepsilon}{3} \leq \Re(z) \leq 4 - \frac{\varepsilon}{3}, 1 \leq |\Im(z) - t| \leq 2\}$.

Ainsi, on a au plus $O_\varepsilon(\ln(2+|t|))$ zéros de ζ dans la région $\{z \in \mathbb{C}, \frac{\varepsilon}{3} \leq \Re(z) \leq 4 - \frac{\varepsilon}{3}, |\Im(z) - t| \leq 2\}$.

Donc : $\sum_{\substack{\rho \in Z_\zeta \\ |\rho-2-it| \leq 2-\frac{\varepsilon}{3} \\ |\rho - z| > \frac{\varepsilon}{2}}} \left|\frac{1}{z-\rho}\right| \leq \sum_{\substack{\rho \in Z_\zeta \\ |\rho-2-it| \leq 2-\frac{\varepsilon}{3} \\ |\rho - z| > \frac{\varepsilon}{2}}} \frac{2}{\varepsilon} \leq O_\varepsilon(\ln(2+|t|))$ autrement dit : $\sum_{\substack{\rho \in Z_\zeta \\ |\rho-2-it| \leq 2-\frac{\varepsilon}{3} \\ |\rho - z| > \frac{\varepsilon}{2}}} \frac{1}{z-\rho} = O_\varepsilon(\ln(2+|t|))$.

De plus, pour z tel que $|z-2-it| \leq 2 - \frac{5\varepsilon}{6}$ et ρ tel que $|\rho - z| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, on a : $|\rho-2-it| \leq |\rho - z| + |z-2-it| \leq 2 - \frac{\varepsilon}{3}$.

Ainsi : $\forall z = \sigma + it, |z-2-it| \leq 2 - \frac{5\varepsilon}{6}$ et $f(z) \neq 0 \Rightarrow \frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{\substack{\rho \in Z_\zeta \\ |z-\rho| \leq \frac{\varepsilon}{2}}} \frac{1}{z-\rho} + O_\varepsilon(\ln(2+|t|))$.

$*$ Soit $z = \sigma + it$ tel que $|z-2-it| > 2 - \frac{5\varepsilon}{6}$ et $\varepsilon \leq \sigma \leq C$.

Comme ζ ne s'annule pas sur Ω_1, il n'y a pas de zéros dans $D(z, \frac{\varepsilon}{2})$.

En effet, soit ρ tel que $|\rho - z| \leq \frac{\varepsilon}{2}$: comme $\Re(z) > \varepsilon$ et $|\sigma - 2| > 2 - \frac{5\varepsilon}{6}$, on a : $\sigma \geq 4 - \frac{5\varepsilon}{6}$.

Ainsi : $\Re(\rho) \geq \sigma - \frac{\varepsilon}{2} \geq 4 - \frac{5\varepsilon}{6} - \frac{\varepsilon}{2} \geq \frac{4}{3} > 1$ car $\varepsilon \leq 2$.

On veut alors montrer que : $\frac{f'(z)}{f(z)} = O_{\varepsilon,C}(\ln(2+|t|))$.

De plus : $\left|-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} - \frac{1}{z-1}\right| \leq \frac{2}{\sigma - 1} + O(1) \leq O_C(1)$ car $\sigma > 1$ par ce qui précède et $\sigma \geq 4 - \frac{5\varepsilon}{6} \geq 4 - \frac{5C}{6}$.

Donc : $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} + \frac{1}{z-1} = O_C(1) = O_{\varepsilon,C}(\ln(2+|t|))$.

□

Corollaire 20. *Pour tout $C, \varepsilon > 0$ et pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\int_\varepsilon^C \int_{t_0-1}^{t_0+1} \left|\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\right| dt d\sigma \leq O_{\varepsilon,C}(\ln(2+|t_0|)).$$

Démonstration. Pour démontrer ce corollaire, on va appliquer la proposition précedente.

On a alors pour tout $z = \sigma + it$ tel que $|t - t_0| \leq 1$, $\varepsilon \leq \sigma \leq C$, $z \neq 1$ et $\zeta(z) \neq 0$:

$-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = -\sum_{\substack{\rho \in Z_\zeta \\ |z-\rho| \leq \frac{\varepsilon}{2}}} \frac{1}{z-\rho} + \frac{1}{z-1} + O_{C,\varepsilon}(\ln(2+|t|))$.

On remarque que $(x,y) \mapsto \frac{1}{x+iy}$ est localement intégrable sur $\mathbb{R}^2$.

En effet, il suffit de montrer que cette fonction est localement intégrable sur un voisinage $V = X \times Y$ de 0.

On a : $\displaystyle\int_{X\times Y}\frac{1}{|x+iy|}dxdy=\int_X\int_Y\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy\leq\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\int_X\frac{1}{\sqrt{|x|}}dx\right)\left(\int_Y\frac{1}{\sqrt{|y|}}dy\right)<+\infty.$

Ainsi, on voit que le terme en $\dfrac{1}{|z-1|}$ et ceux de la somme en $\dfrac{1}{|z-\rho|}$ ont une contribution en $O_{\varepsilon,C}(1)$ pour l'intégrale considérée dans ce corollaire.

De plus, par la proposition 18, on a au plus $O_\varepsilon(\ln(2+|t_0|))$ zéros ρ comme dans la somme car :
$\forall z=\sigma+it, t\in[t_0-1,t_0+1]$ et $\varepsilon\leq\sigma\leq C$, $\forall\rho\in Z_\zeta, |z-\rho|\leq\dfrac{\varepsilon}{2}\Rightarrow\dfrac{\varepsilon}{2}\leq\Re(\rho)\leq C+\dfrac{\varepsilon}{2}$ et $|\Im(\rho)-t_0|\leq 1+\dfrac{\varepsilon}{2}$.

Par ailleurs, comme le nombre de zéros d'une fonction méromorphe est fini dans un compact, on peut utiliser la majoration précédente dans l'intégrale sur $[\varepsilon,C]\times[t_0-1,t_0+1]$.

Ainsi : $\displaystyle\int_\varepsilon^C\int_{t_0-1}^{t_0+1}\left|\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\right|dtd\sigma\leq\int_\varepsilon^C\int_{t_0-1}^{t_0+1}O_{\varepsilon,C}(\ln(2+|t|))dtd\sigma=O_{\varepsilon,C}(\ln(2+|t_0|))$ car $|t|\leq|t_0|+1$.

□

Théorème 21 (Formule explicite de la fonction de von Mangoldt tronquée)**.**

Pour tout $0<\varepsilon<1$, $T\geq 2$ *et* $x\geq T$, *on a :*

$$\sum_{n\leq x}\Lambda(n)=x-\sum_{\substack{\rho\in Z_\zeta\\ \Re(\rho)\geq\varepsilon\\ |\Im(\rho)|\leq T}}\frac{x^\rho}{\rho}+O_\varepsilon(x^\varepsilon\ln^2(T))+O_\varepsilon\left(\frac{x}{T}\ln^2(xT)\right).$$

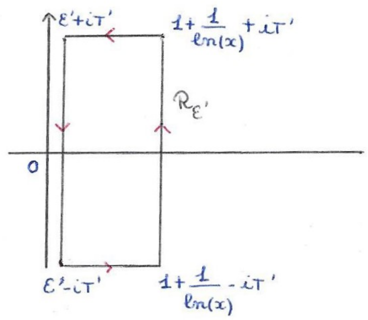
Démonstration. On fixe $0<\varepsilon<1$, $T\geq 2$ et $x\geq T$.

⋄ On suppose par l'absurde que pour tout $T'\in[T,T+1]$, pour tout $C_\varepsilon>0$, on a : $\displaystyle\int_{\frac{\varepsilon}{4}}^3\left|\frac{\zeta'(\sigma\pm iT')}{\zeta(\sigma\pm iT')}\right|d\sigma>C_\varepsilon\ln(T)$.
On a alors : $\displaystyle\int_T^{T+1}\int_{\frac{\varepsilon}{4}}^3\left|\frac{\zeta'(\sigma\pm it)}{\zeta(\sigma\pm it)}\right|d\sigma dt>\int_T^{T+1}C_\varepsilon\ln(T)dt=C_\varepsilon\ln(T)$.

On obtient alors une contradiction avec le corollaire précédent.

Il existe donc $T'\in[T,T+1]$ tel que : $\displaystyle\int_{\frac{\varepsilon}{4}}^3\left|\frac{\zeta'(\sigma\pm iT')}{\zeta(\sigma\pm iT')}\right|d\sigma\leq O_\varepsilon(\ln(T))$.

La formule (1) donne, comme $T'\geq T$, que : $\displaystyle\sum_{n\leq x}\Lambda(n)=\frac{1}{2i\pi}\int_{1+\frac{1}{\ln(x)}-iT'}^{1+\frac{1}{\ln(x)}+iT'}-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\frac{x^z}{z}dz+O\left(\frac{x}{T}\ln^2(xT)\right).$ (3)

* 

Pour trouver une majoration de l'intégrale, on veut appliquer le théorème des résidus à la fonction $z \mapsto -\dfrac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\dfrac{x^z}{z}$ et au contour $R_{\varepsilon'}$ suivant.

On cherche donc ε' qui évite les pôles de cette fonction sur $[\varepsilon' - iT', \varepsilon' + iT']$ et tel qu'on aît un bon contrôle de l'intrégale sur cet intervalle.

On a : $$\int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\varepsilon}\int_{-T'}^{T'}\left|\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\frac{x^{\sigma+it}}{\sigma+it}\right|dtd\sigma = \sum_{n=1}^{\lfloor T'\rfloor-1}\int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\varepsilon}\int_{n}^{n+1}\left|\frac{\zeta'(\sigma-it)}{\zeta(\sigma-it)}\frac{x^{\sigma-it}}{\sigma-it}\right|dtd\sigma$$
$$+\sum_{n=1}^{\lfloor T'\rfloor-1}\int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\varepsilon}\int_{n}^{n+1}\left|\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\frac{x^{\sigma+it}}{\sigma+it}\right|dtd\sigma + \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\varepsilon}\int_{-1}^{1}\left|\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\frac{x^{\sigma+it}}{\sigma+it}\right|dtd\sigma$$
$$+\int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\varepsilon}\int_{\lfloor T'\rfloor}^{T'}\left|\frac{\zeta'(\sigma-it)}{\zeta(\sigma-it)}\frac{x^{\sigma-it}}{\sigma-it}\right|dtd\sigma + \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\varepsilon}\int_{\lfloor T'\rfloor}^{T'}\left|\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\frac{x^{\sigma+it}}{\sigma+it}\right|dtd\sigma$$
$$\leq x^{\varepsilon}\left(2\sum_{n=1}^{\lfloor T'\rfloor}\frac{1}{n}+\frac{2}{\varepsilon}\right)\int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\varepsilon}\int_{-T'}^{T'}\left|\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\right|dtd\sigma$$
$$\leq x^{\varepsilon}\left(2+\frac{2}{\varepsilon}+\int_{1}^{\lfloor T'\rfloor}\frac{1}{u}du\right)\int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\varepsilon}\int_{-T'}^{T'}\left|\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\right|dtd\sigma$$
$$\leq O_{\varepsilon}(x^{\varepsilon}\ln^2(2+T')) \qquad \text{par le corollaire précédent}$$
$$\leq O_{\varepsilon}(x^{\varepsilon}(\ln^2(T)).$$

De même que précédemment, il existe $\varepsilon' \in [\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon]$ tel que : $\displaystyle\int_{-T'}^{T'}\left|\frac{\zeta'(\varepsilon'+it)}{\zeta(\varepsilon+it)}\frac{x^{\varepsilon'+it}}{\varepsilon'+it}\right|dt \leq O_{\varepsilon}(x^{\varepsilon}\ln^2(T)).$

Comme une fonction méromorphe a un nombre fini de zéros dans un compact, quitte à réduire ce ε', on peut supposer que $[\varepsilon' - iT', \varepsilon' + iT']$ évite les pôles de $z \mapsto \dfrac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\dfrac{x^z}{z}$.

On remarque que la fonction $z \mapsto \dfrac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\dfrac{x^z}{z}$ sur Ω_0 a un pôle simple en 1 de résidu x et a des pôles en chaque zéro ρ (compté avec multiplicité) de ζ de résidu $-\dfrac{x^\rho}{\rho}$ et ce sont les seuls pôles sur Ω_0.

Par le théorème des résidus, on a :

$$x + \sum_{\substack{\rho \in Z_\zeta \\ \varepsilon' \leq \Re(\rho) \leq 1+\frac{1}{\ln(x)} \\ |\Im(\rho)| \leq T'}} \frac{x^\rho}{\rho} = \frac{1}{2i\pi} \int_{1+\frac{1}{\ln(x)}-iT'}^{1+\frac{1}{\ln(x)}+iT'} -\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} \frac{x^z}{z} dz + \frac{1}{2i\pi} \int_{1+\frac{1}{\ln(x)}+iT'}^{\varepsilon'+iT'} -\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} \frac{x^z}{z} dz$$

$$+ \frac{1}{2i\pi} \int_{\varepsilon'+iT'}^{\varepsilon'-iT'} -\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} \frac{x^z}{z} dz + \frac{1}{2i\pi} \int_{\varepsilon'-iT'}^{1+\frac{1}{\ln(x)}-iT'} -\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} \frac{x^z}{z} dz. \quad (4)$$

On remarque qu'on peut en fait indexer la somme précédente sur $\{\rho \in Z_\zeta, \varepsilon' \leq \Re(\rho) \ et \ |\Im(\rho)| \leq T'\}$ car ζ n'a pas de zéros sur Ω_1.

$*$ Il reste donc à majorer les intégrales sur : $[1 + \frac{1}{\ln(x)} + iT', \varepsilon' + iT']$, $[\varepsilon' + iT', \varepsilon - iT']$ et $[\varepsilon - iT', 1 + \frac{1}{\ln(x)} - iT']$.

. On a par définition de T' : $\left| \int_{1+\frac{1}{\ln(x)}+iT'}^{\varepsilon'+iT'} -\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} \frac{x^z}{z} dz \right| \leq \frac{x^{1+\frac{1}{\ln(x)}}}{T'} \int_{\varepsilon'}^{1+\frac{1}{\ln(x)}} \left| \frac{\zeta'(\sigma+iT')}{\zeta(\sigma+iT')} \right| d\sigma \leq O_\varepsilon \left(\frac{x}{T} \ln(T) \right)$

Ainsi : $\int_{1+\frac{1}{\ln(x)}+iT'}^{\varepsilon'+iT'} -\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} \frac{x^z}{z} dz = O_\varepsilon \left(\frac{x}{T} \ln^2(xT) \right)$.

. De même, par définition de T', on a : $\int_{\varepsilon'-iT'}^{1+\frac{1}{\ln(x)}-iT'} -\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} \frac{x^z}{z} dz = O_\varepsilon \left(\frac{x}{T} \ln^2(xT) \right)$.

. De plus, par définition de ε', on a : $\int_{\varepsilon'+iT'}^{\varepsilon'-iT'} -\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} \frac{x^z}{z} dz = O_\varepsilon(x^\varepsilon \ln^2(T))$.

Ainsi, par (4), on a : $x + \sum_{\substack{\rho \in Z_\zeta \\ \varepsilon' \leq \Re(\rho) \\ |\Im(\rho)| \leq T'}} \frac{x^\rho}{\rho} = \int_{1+\frac{1}{\ln(x)}-iT'}^{1+\frac{1}{\ln(x)}+iT'} -\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} \frac{x^z}{z} dz + O_\varepsilon \left(\frac{x}{T} \ln^2(xT) \right) + O_\varepsilon(x^\varepsilon \ln^2(T))$. (5)

$\diamond$ Il reste à majorer $\sum_{\substack{\rho \in Z_\zeta \\ \varepsilon' \leq \Re(\rho) \\ T \leq |\Im(\rho)| \leq T'}} \left| \frac{x^\rho}{\rho} \right|$ et $\sum_{\substack{\rho \in Z_\zeta \\ \varepsilon' \leq \Re(\rho) \leq \varepsilon \\ |\Im(\rho)| \leq T'}} \left| \frac{x^\rho}{\rho} \right|$ pour avoir le résultat.

$*$ Par la proposition 18, on a au plus $O_\varepsilon(\ln(2+T))$ zéro ρ de ζ dans la région $\{\sigma + it, \sigma \geq \varepsilon' \geq \frac{\varepsilon}{2} \ et \ T \leq |t| \leq T' \leq T + 1\}$.

Ainsi, comme les zéros de ζ ont une partie réelle d'au plus 1, on a : $\sum_{\substack{\rho \in Z_\zeta \\ \varepsilon \leq \Re(\rho) \\ T \leq |\Im(\rho)| \leq T'}} \left| \frac{x^\rho}{\rho} \right| \leq \frac{x}{T} O_{\varepsilon'}(\ln(2+T)) = O_\varepsilon \left(\frac{x}{T} \ln^2(xT) \right)$.

$*$ On a : $\displaystyle\sum_{\substack{\rho\in Z_\zeta \\ \varepsilon'\leq\Re(\rho)\leq\varepsilon \\ |\Im(\rho)|\leq T'}} \left|\frac{x^\rho}{\rho}\right| \leq \sum_{\substack{\rho\in Z_\zeta \\ \varepsilon'\leq\Re(\rho)\leq\varepsilon \\ \lfloor T'\rfloor\leq|\Im(\rho)|\leq T'}} \left|\frac{x^\rho}{\rho}\right| + \sum_{n=0}^{\lfloor T'\rfloor-1} \sum_{\substack{\rho\in Z_\zeta \\ \varepsilon'\leq\Re(\rho)\leq\varepsilon \\ k\leq|\Im(\rho)|\leq k+1}} \left|\frac{x^\rho}{\rho}\right| \leq \sum_{k=0}^{\lfloor T'\rfloor} \sum_{\substack{\rho\in Z_\zeta \\ \varepsilon'\leq\Re(\rho)\leq\varepsilon \\ |\Im(\rho)-k|\leq 1}} \left|\frac{x^\rho}{\rho}\right|.$

Par la proposition 17, par comparaison série intégrale et comme $T' \in [T, T+1]$ et $\varepsilon' \in [\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon]$, on a alors :

$$\sum_{\substack{\rho\in Z_\zeta \\ \varepsilon'\leq\Re(\rho)\leq\varepsilon \\ |\Im(\rho)|\leq T'}} \left|\frac{x^\rho}{\rho}\right| \leq \sum_{k=1}^{\lfloor T'\rfloor} \frac{x^\varepsilon}{k} O_\varepsilon(\ln(2+k)) + \frac{x^\varepsilon}{\varepsilon'} O_\varepsilon(1) \leq \left(\int_1^{\lfloor T'\rfloor} \frac{1}{u} du\right) O_\varepsilon(x^\varepsilon \ln(T)) + O_\varepsilon(1) \leq O_\varepsilon(x^\varepsilon \ln^2(T)).$$

En réinjectant toutes ces majorations dans (3) et en utilisant (5), on obtient alors le résultat.

$\square$

Remarque. On considère $0 < \varepsilon' \leq \varepsilon < 1$, $T \geq 2$ et $x > T + 1$.

Le théorème précédent donne alors : $\displaystyle\sum_{n\leq x} \Lambda(n) = x - \sum_{\substack{\rho\in Z_\zeta \\ \Re(\rho)\geq\varepsilon' \\ |\Im(\rho)|\leq T}} \frac{x^\rho}{\rho} + O_{\varepsilon'}(x^{\varepsilon'} \ln^2(T)) + O_{\varepsilon'}\left(\frac{x}{T} \ln^2(xT)\right).$

En utilisant, la proposition 17 comme la démonstration précédente, on en déduit qu'on a plus précisément :
$\displaystyle\sum_{n\leq x} \Lambda(n) = x - \sum_{\substack{\rho\in Z_\zeta \\ \Re(\rho)\geq\varepsilon \\ |\Im(\rho)|\leq T}} \frac{x^\rho}{\rho} + O_{\varepsilon'}(x^{\varepsilon} \ln^2(T)) + O_{\varepsilon'}\left(\frac{x}{T} \ln^2(xT)\right).$

b) Majoration standard de la fonction ψ

La formule explicite de la fonction de von Mangoldt tronquée permet de montrer le corollaire suivant, ce qui va nous donner la majoration standard de ψ .

Corollaire 22. *Soit* $0 < \delta \leq \frac{1}{2}$, $T \geq 2$ *et* $x \geq T$.

On suppose qu'il n'y a pas de zéros de ζ *dans la région* $\{z \in \mathbb{C}, 1-\delta < \Re(z) \leq 1$ *et* $|\Im(z)| \leq T\}$.

On a alors :

$$\sum_{n\leq x} \Lambda(n) = x + O(x^{1-\delta} \ln^2(T)) + O\left(\frac{x}{T} \ln^2(xT)\right).$$

Démonstration. On obtient le résultat en appliquant le théorème précédent à $\varepsilon = 1 - \delta \in [\frac{1}{2}, 1[$.

De plus, la remarque précédente jusitifie pourquoi les constantes de dépendent plus de ε.

$\square$

Pour pouvoir utiliser ce corollaire, il faut tout d'abord exhiber une région où ζ ne s'annule pas

Proposition 23 (Région classique sans zéro de ζ).

Il existe une constante absolue $c > 0$ telle que ζ n'a pas de zéro dans la région $\{\beta + it, \beta > 1 - \dfrac{c}{\ln(2+|t|)}\}$.

Démonstration. Pour montrer cette proposition, on va raisonner par l'absurde.

On considère $c > 0$, que l'on choisira plus tard : il existe alors $t \in \mathbb{R}$ et $\beta > 1 - \dfrac{c}{\ln(2+|t|)}$ tel que $\zeta(\beta + it) = 0$.

Comme ζ a un pôle simple en 1, il n'y a pas de zéros de ζ dans un voisinage de 1 : on a alors $|t| \geq 1$ si c est choisi suffisamment petit et on peut supposer que $\beta > 0$ en choisissant c suffisamment petit.

On sait que : $\forall \theta \in \mathbb{R}, 1 - \cos(2\theta) = 2(1-\cos^2(\theta)) = -2(1+\cos(\theta))^2 + 4(1+\cos(\theta)) \leq 4(1+\cos(\theta))$.

Autrement dit : $\forall \theta \in \mathbb{R}, 3 + 4\cos(\theta) + \cos(2\theta) \geq 0$ et en particulier : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 3 + 4\Re(n^{-it}) + \Re(n^{-2it}) \geq 0$.

En multipliant l'inégalité précédente par $\Lambda(n)n^{-\sigma}$ pour tout $n \geq 1$ et $\sigma > 1$ et en sommant, on obtient alors :

$$\forall \sigma > 1, -3\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} - 4\Re\left(\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\right) - \Re\left(\frac{\zeta'(\sigma+2it)}{\zeta(\sigma+2it)}\right) \geq 0. \tag{6}$$

On cherche alors à majorer ces trois termes.

$\diamond$ Par la proposition 19, on a : $\forall\ 1 < \sigma < 2,$
$$-\frac{\zeta'(\sigma+2it)}{\zeta(\sigma+2it)} = -\sum_{\substack{\rho \in Z_\zeta \\ |\sigma+2it-\rho| \leq \frac{1}{4}}} \frac{1}{\sigma+2it-\rho} + \frac{1}{\sigma+2it-1} + O(\ln(2+|2t|))$$
$$= -\sum_{\substack{\rho \in Z_\zeta \\ |\sigma+2it-\rho| \leq \frac{1}{4}}} \frac{1}{\sigma+2it-\rho} + O(\ln(2+|t|)) \qquad \text{car } |t| \geq 1.$$

Comme les zéros ρ de ζ ont une partie réelle d'au plus 1, on a :
$$\forall \rho \in Z_\zeta, \forall\ 1 < \sigma < 2, \Re\left(\frac{1}{\sigma+2it-\rho}\right) = \frac{\sigma - \Re(\rho)}{|\sigma+2it-\rho|^2} \geq \frac{\sigma-1}{|\sigma+2it-\rho|^2} > 0.$$

Ainsi : $\forall\ 1 < \sigma < 2, -\Re(\left(\dfrac{\zeta'(\sigma+2it)}{\zeta(\sigma+2it)}\right) \leq O(\ln(2+|t|))$.

$\diamond$ De même, par la proposition 19, on a : $\forall\ 1 < \sigma < 2,$
$$-\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)} = -\sum_{\substack{\rho \in Z_\zeta \\ |\sigma+it-\rho| \leq \frac{1}{4}}} \frac{1}{\sigma+it-\rho} + O(\ln(2+|t|)).$$

$*$ Pour $1 < \sigma < 2$, si $|\sigma - \beta| \leq \dfrac{1}{4}$, comme précédemment, on a : $-\Re\left(\dfrac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\right) \leq -\dfrac{1}{\sigma-\beta} + O(\ln(2+|t|))$.

$*$ Pour $1 < \sigma < 2$, si $|\sigma - \beta| \geq \dfrac{1}{4}$, on a : $\dfrac{1}{\sigma-\beta} = O(1)$.

Ainsi comme précédemment, on a : $-\Re\left(\dfrac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\right) \leq -\dfrac{1}{\sigma-\beta} + O(\ln(2+|t|))$.

On en déduit donc que : $\forall\ 1 < \sigma < 2, -\Re\left(\dfrac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\right) \leq -\dfrac{1}{\sigma-\beta} + O(\ln(2+|t|))$.

$\diamond$ On a vu que pour tout $\sigma > 1$, $-\dfrac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} = \dfrac{1}{\sigma-1} + O(1)$.

En réinjectant ces majorations dans (6), on obtient : $\forall\ 1 < \sigma < 2, \dfrac{3}{\sigma-1} - \dfrac{4}{\sigma-\beta} \geq -O(\ln(2+|t|))$.

On considère $\sigma = 1 + 4(1-\beta)$: $\sigma > 1$ comme ζ n'a pas de zéros sur $\overline{\Omega_1}$ et $\sigma < 2$ si c est choisi suffisamment petit.

Par ce qui précède, on a : $\left(\dfrac{3}{4} - \dfrac{4}{5}\right)\dfrac{1}{1-\beta} \geq -O(\ln(2+|t|))$ d'où : $\dfrac{1}{1-\beta} \leq O(\ln(2+|t|))$.

En choisissant c suffisamment petit, on aboutit alors a une contradiction puisque $\beta < 1 - \dfrac{c}{\ln(2+|t|)}$.

$\square$

Corollaire 24 (Majoration standard de ψ)**.**

Il existe une constante absolue $c > 0$ telle que pour tout $x \geq 3$, on ait :

$$\sum_{n \leq x} \Lambda(n) = x + O(x \exp(-c\sqrt{\ln(x)})).$$

Démonstration. Par la proposition précédente, il existe $c_0 > 0$ tel que ζ n'a pas de zéros dans la région $\{\beta + it, \beta > 1 - \dfrac{c_0}{\ln(2+|t|)}\}$.

On va appliquer le corollaire 22 avec $2 \leq T = 2\exp(c_1\sqrt{\ln(x)})$ et $\delta = \dfrac{c_1}{\sqrt{\ln(x)}}$ où c_1 est choisi suffisamment petit pour que $\{z \in \mathbb{C}, 1-\delta < \Re(z) \leq 1 \ et\ |\Im(z)| \leq T\}$ ne contienne aucun zéro de ζ et tel que $T \leq x$ et $\delta \leq \dfrac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{On a alors : } \psi(x) &= x + O\left(x^{1-\frac{c_1}{\sqrt{\ln(x)}}} \ln^2(2\exp(c_1\sqrt{\ln(x)}))\right) + O\left(x\exp(-c_1\sqrt{\ln(x)})\ln^2(2x\exp(c_1\sqrt{\ln(x)}))\right) \\ &= x + O\left(x\ln(x)\exp(-c_1\sqrt{\ln(x)})\right) + O\left(x\ln^2(x)\exp(-c_1\sqrt{\ln(x)})\right). \end{aligned} \tag{7}$$

Or, on remarque que pour $a > 0$, $\ln^2(x)\exp(-a\sqrt{\ln(x)}) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Il exsite donc $c < c_1$ tel que $\ln^2(x)\exp(-c_1\sqrt{\ln(x)}) = O\left(\exp(-c\sqrt{\ln(x)})\right)$.

De plus : $\ln(x)\exp(-c_1\sqrt{\ln(x)}) = O\left(\ln^2(x)\exp(-c_1\sqrt{\ln' x)})\right) = O\left(\exp(-c\sqrt{\ln(x)})\right)$.

On réinjectant ces majorations dans l'égalité (7), on obtient le résultat voulu. $\square$

IV. Conjecture de Riemann

Dans cette partie, on va s'intéresser à un énoncé équivalent à la conjecture de Riemann : il s'agit d'une majoration plus fine de l'erreur dans le théorème des nombres premiers. Comme dans la partie précédente, on va s'intéresser à une majoration plus fine pour ψ car cela revient à avoir une majoration de l'erreur plus fine de la fonction ϕ.

Conjecture (Conjecture de Riemann)**.**

Tous les zéros non triviaux de ζ, autrement dit tous les zéros de ζ se trouvant dans la bande $\{z \in \mathbb{C}, 0 < \Re(z) < 1\}$, se trouvent sur la droite $\{z \in \mathbb{C}, \Re(z) = \dfrac{1}{2}\}$.

On va tout d'abord s'intéresser à l'équation fonctionnelle vérifiée par ζ qui va dire que les zéros non trivaux de ζ sont symétriques par rapport à la droite $\{z \in \mathbb{C}, \Re(z) = \dfrac{1}{2}\}$. Pour cela, on va s'appuyer sur [4].

1- Résultats préliminaires

Avant de pouvoir établir l'équation fonctionnelle que vérifie la fonction ζ, on doit introduire des fonctions intermédiaires et donner quelques propriétés sur ces dernières.

On va commencer par énoncer une proposition qui nous sera utile dans la suite et dont la démonstration sera faite en annexe.

Proposition 25 (Formule sommatoire de Poisson)**.**

Soit $F \in L^1(\mathbb{R}) \bigcap \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ telle que : $\star\ \exists M > 0, \exists \alpha > 1, \forall x \in \mathbb{R}, |F(x)| \leq M(1+|x|)^{-\alpha}$;
$\star\ \displaystyle\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{F}(n)| < +\infty$.

On a alors :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} F(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{F}(n).$$

Définition 26. On intrduit la fonction $\theta : t \mapsto \displaystyle\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t}$ définie pour $t > 0$.

Remarque. On remarque que cette série est bien définie car pour tout $t > 0$, $e^{\pi n^2 t} \underset{n \to +\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et de plus $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{Z}^*}$ est le terme générale d'une série convergente, positive et indépendante de t.

Proposition 27 (Propriétés de la fonction θ)**.**

1. *θ satisfait l'équation fonctionnelle :* $\forall t > 0, \theta(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}\theta\left(\dfrac{1}{t}\right)$.
2. *Il existe $C > 0$ tel que :* $\forall t \geq 1, \theta(t) - 1 \leq Ce^{-t}$.
3. *Il existe $\tilde{C} > 0$ tel que :* $\forall 0 < t < 1, \theta(t) \leq \dfrac{\tilde{C}}{\sqrt{t}}$.

Démonstration. (1) On pose $F_t : x \mapsto e^{-\pi x^2 t}$ pour $t > 0$.

Il suffit d'appliquer la formule sommatoire de Poisson pour avoir le résultat : pour cela il faut vérifier les hypothèses de la propostion 25.

$\diamond$ Pour tout $t > 0$, on a : $F_t \in L^1((R)) \bigcap \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

$\diamond$ Pour tout $t > 0$, on a : $F_t(x) \underset{x \to \pm\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{(1+|x|)^2}\right)$.

Il existe donc $M > 0$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0, |F_t(x)| \leq M(1+|x|)^{-2}$.

$\diamond$ Comme la transformée de Fourier de $x \mapsto e^{-\pi x^2}$ est $\xi \mapsto e^{-\pi \xi^2}$.

On a donc par changement de variable : $\forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \widehat{F_t}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{t}} e^{-\pi \frac{x^2}{t}} = \dfrac{1}{\sqrt{t}} F_{\frac{1}{t}}(x)$.

Comme on a vu que θ est bien définie pour tout $t > 0$, on a : $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{F_t}(n)| < +\infty$ pour tout $t > 0$.

Les hypothèses de la proposition 25 étant bien vérifiée, on a le résultat.

(2) $\displaystyle\forall t \geq 1, \theta(t) - 1 = 2\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n^2 t} \leq 2\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n t} = \frac{2e^{-\pi t}}{1 - e^{-\pi t}} \leq \frac{2e^{-t}}{1 - e^{-\pi}}$ car $t \geq 1$.

En posant $C = \dfrac{2}{1 - e^{-\pi}}$, on a le résultat.

(3) $\forall t \in]0,1[, \dfrac{1}{t} \geq 1 \Rightarrow \theta(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}\theta\left(\dfrac{1}{t}\right) \leq \dfrac{1}{\sqrt{t}}\left(1 + \dfrac{2e^{-\frac{\pi}{t}}}{1 - e^{-\frac{\pi}{t}}}\right) \leq \dfrac{1}{\sqrt{t}}\left(\dfrac{2e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}}\right)$.

En posant $\tilde{C} = \dfrac{2e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}}$, on a le résultat.

$\square$

Définition 28. On définit la fonction Gamma sur Ω_0 par $\Gamma : z \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$.

Proposition 29 (Propriétés de la fonction Gamma)**.**

1. *Γ est une fonction holomorphe sur Ω_0.*
2. *Γ s'étend comme une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ qui ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$ et dont l'ensemble des pôles est $\{-n, n \in \mathbb{N}\}$.*
3. $\forall z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}_-, \Gamma(z) = 2^{z-1} \dfrac{\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}$.

Remarque. Ces propriétés de la fonction Gamma, ayant été démontrées dans le cours de fonctions holomorphes du premier semestre de M1, ne vont pas être redémontrées ici.

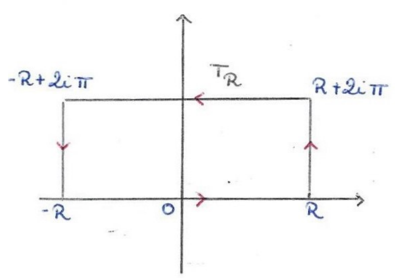
Lemme 30. $\forall 0 < a < 1, \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{v^{a-1}}{1+v} dv = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}$.

Démonstration.

$\diamond$ L'intégrale est bien définie car : $\star \dfrac{v^{a-1}}{1+v} \underset{v \to 0}{\sim} v^{a-1}$ et $v \mapsto v^{a-1}$ est intégrable en 0 car $a - 1 > -1$;

$\star \dfrac{v^{a-1}}{1+v} \underset{v \to +\infty}{\sim} v^{a-2}$ et $v \mapsto v^{a-2}$ est intégrable en $+\infty$ car $a - 2 < -1$.

$\diamond$ On a : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{v^{a-1}}{1+v} dv \underset{v=e^x}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx$.



On va appliquer le théorème des résidus à la fonction $f : z \mapsto \dfrac{e^{az}}{1+e^z}$, qui est une fonction méromorphe dont l'ensemble des pôles est $\{i\pi + 2ik\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, et au contour T_R suivant pour $R > 0$

On a : $\displaystyle\frac{1}{2i\pi} \int_{T_R} \frac{e^{az}}{1+e^z} dz = Res(i\pi, f) = \lim_{z \to i\pi} (z - i\pi) f(z) = -e^{ia\pi}$.

$$* \int_{-R}^{R} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx \underset{R \to +\infty}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx.$$

$$* \int_{R+2i\pi}^{-R+2i\pi} \frac{e^{az}}{1+e^z} dz = -\int_{-R}^{R} \frac{e^{a(-x+2i\pi)}}{1+e^{-x+2i\pi}} dx = -e^{2ia\pi} \int_{-R}^{R} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx \underset{R \to +\infty}{\longrightarrow} -e^{2ia\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx.$$

$$* \left| \int_{R}^{R+2i\pi} \frac{e^{az}}{1+e^z} dz \right| \leq 2\pi \sup_{t \in [0, 2\pi]} \left| \frac{e^{a(R+it)}}{1+e^{R+it}} \right| \leq 2\pi \frac{e^{aR}}{e^R - 1} \text{ pour } R \text{ assez grand.}$$

Or : $2\pi\frac{e^{aR}}{e^R-1} \underset{R\to+\infty}{\sim} 2\pi e^{(a-1)R} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'où : $\displaystyle\int_R^{R+2i\pi} \frac{e^{az}}{1+e^z}dz \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

$*$ De même : $\displaystyle\int_{-R+2i\pi}^{-R} \frac{e^{az}}{1+e^z}dz \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

En passant à la limite quand R tend vers $+\infty$, on a alors : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}dx = 2i\pi\frac{e^{ia\pi}}{e^{2ia\pi}-1} = \frac{\pi}{sin(\pi a)}.$

□

Proposition 31. $\forall z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}, \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi z)}$

Démonstration. Il suffit de montrer que le résultat est vrai pour $0 < x < 1$ car par prolongement analytique, on aura le résultat sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$.

On considère un paramètre $t > 0$ et on fixe $x \in]0,1[$.

On remarque tout d'abord que : $\displaystyle\Gamma(1-x) = \int_0^{+\infty} e^{-u}u^{-x}du \underset{u=tv}{=} t\int_0^{+\infty} e^{-tv}(tv)^{-x}dv.$

$$\begin{aligned}
\text{Ainsi : } \Gamma(1-x)\Gamma(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-t}t^x\left(\int_0^{+\infty} e^{-vt}(vt)^{-x}dv\right)dt \\
&= \int_0^{+\infty} v^{-x}\left(\int_0^{+\infty} e^{-t(v+1)}dt\right)dv && \text{par Fubini-Lebesgues} \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{v^{-x}}{v+1}dv \\
&= \frac{\pi}{\sin(\pi(1-x))} && \text{par le lemme précédent} \\
&= \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.
\end{aligned}$$

□

2- Equation fonctionnelle de ζ

Grâce aux résultats montrés précédemment, on va pouvoir établir l'équation fonctionnelle vérifiée par la fonction ζ.

Théorème 32. *On définit* $\Theta : u \mapsto \dfrac{\theta(u)-1}{2}$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$.

On a pour tout $z \in \Omega_1$ *:*

$$\int_0^{+\infty} u^{\frac{z}{2}-1}\Theta(u)du = \pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z).$$

Démonstration. $\diamond$ Par la proposition 27, on voit que l'intégrale est bien définie.

$\diamond$ On a : $\forall z \in \Omega_1, \int_0^{+\infty} u^{\frac{z}{2}-1}\Theta(u)du = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} u^{\frac{z}{2}-1} e^{-\pi n^2 u} du.$

$$\text{On a : } \forall N \geq 1, \sum_{n=1}^{N} \int_0^{+\infty} \left| u^{\frac{z}{2}-1} e^{-\pi n^2 u} \right| du = \sum_{n=1}^{N} \int_0^{+\infty} u^{\frac{\Re(z)}{2}-1} e^{-\pi n^2 u} du$$
$$= \int_0^{+\infty} u^{\frac{\Re(z)}{2}-1} \sum_{n=1}^{N} e^{-\pi n^2 u} du$$
$$\leq \int_0^{+\infty} u^{\frac{\Re(z)}{2}-1} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n^2 u} du.$$

Par la proposition 27, on en déduit que la somme considérée converge bien : on peut donc inverser somme et intégrale.

On a alors : $\forall z \in \Omega_1, \int_0^{+\infty} u^{\frac{z}{2}-1}\Theta(u)du = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u^{\frac{z}{2}-1} e^{-\pi n^2 u} du \underset{u=\frac{t}{\pi n^2}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z} \int_0^{+\infty} \pi^{-\frac{z}{2}} t^{\frac{z}{2}-1} e^{-t} dt = \pi^{-\frac{z}{2}} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \zeta(z).$

□

Définition 33. On définit la fonction Xi sur Ω_1 par $\xi : z \mapsto \pi^{-\frac{z}{2}} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \zeta(z)$.

Remarque. Cette fonction est holomorphe sur Ω_1 comme produit de fonctions holomorphes.

Théorème 34 (Prolongement méromorphe de ξ)**.**

ξ possède un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$, qui n'a que deux pôles simples en 0 et en 1.

De plus, ξ vérifie l'équation fonctionnelle suivante : $\forall z \in \mathbb{C}\backslash\{0,1\}, \xi(z) = \xi(1-z)$.

Démonstration. $\diamond$ On va commencer par montrer que : $\forall z \in \Omega_1, \xi(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} + \int_1^{+\infty} \left(v^{-\frac{z}{2}-\frac{1}{2}} + v^{\frac{z}{2}-1}\right)\Theta(v)dv.$

Comme pour tout $u > 0$, $\theta(u) = \frac{1}{\sqrt{u}}\theta\left(\frac{1}{u}\right)$, on a : $\forall u > 0, \Theta(u) = \frac{1}{\sqrt{u}}\Theta\left(\frac{1}{u}\right) + \frac{1}{2\sqrt{(u)}} - \frac{1}{2}.$

De plus, par la proposition précédente, on a : $\forall z \in \Omega_1, \xi(z) = \int_0^{+\infty} u^{\frac{z}{2}-1}\Theta(u)du = \int_0^{1} u^{\frac{z}{2}-1}\Theta(u)du + \int_1^{+\infty} u^{\frac{z}{2}-1}\Theta(u)du.$

Or : $\forall z \in \Omega_1, \displaystyle\int_0^1 u^{\frac{z}{2}-1}\Theta(u)du = \int_0^1 u^{\frac{z}{2}-1}\left(\frac{1}{\sqrt{u}}\Theta\left(\frac{1}{u}\right) + \frac{1}{2\sqrt{u}} - \frac{1}{2}\right)du$

$$= \int_0^1 \frac{u^{\frac{z}{2}}}{\sqrt{u}u}\Theta\left(\frac{1}{u}\right)du + \frac{1}{2}\int_0^1 \left(u^{\frac{z}{2}-\frac{3}{2}} - u^{\frac{z}{2}-1}\right)du$$

$$\underset{u=\frac{1}{v}}{=} \int_1^{+\infty} v^{-\frac{z}{2}-\frac{1}{2}}\Theta(v)dv + \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}.$$

On a donc : $\forall z \in \Omega_1, \xi(z) = \dfrac{1}{z-1} - \dfrac{1}{z} + \displaystyle\int_1^{+\infty}\left(v^{-\frac{z}{2}-\frac{1}{2}} + v^{\frac{z}{2}-1}\right)\Theta(v)dv.$

$\diamond$ Il reste à montrer que l'intégrale de droite est une fonction entière et que l'équation fonctionnelle est bien vérifiée.

$*$ Comme Θ décroît exponentiellement à l'infini d'après la proposition 27, par le théorème de dérivation sous le signe intégral, on en déduit que l'intégrale est bien une fonction entière : ξ se prolonge donc en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ et ses seuls pôles sont simples et sont en 0 et en 1.

$*$ De plus grâce à l'égalité précédente, on voit facilement que ξ vérifie bien cette équation fonctionnelle.

$\square$

Théorème 35 (Prolongement méromorphe de ζ)**.**

ζ possède un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec un unique pôle simple en 1.

De plus, ζ satisfait l'équation fonctionnelle suivante : $\forall z \in \mathbb{C}\backslash\{0,1\}, \zeta(z) = 2^z\pi^{z-1}\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right)\Gamma(1-z)\zeta(1-z).$

Démonstration. $\diamond$ Le théorème précédent donne directement le prolongement méromorphe de ζ sur $\mathbb{C}$.

Il est donné par : $\zeta(z) = \pi^{\frac{z}{2}}\dfrac{\xi(z)}{\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)}.$

Or, $g : z \mapsto \dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)}$ est une fonction entière et l'ensemble de ses zéros est $\{-2n, n \in \mathbb{N}\}$ et ils sont tous simples.

Le pôle simple de ξ en 0 est donc annulé par le zéro simple de g : il ne reste donc qu'un pôle simple en 1.

$\diamond$ On sait que : $\forall z \in \mathbb{C}\backslash\{0,1\}, \xi(z) = \xi(1-z)$ d'où : $\forall z \in \mathbb{C}\backslash\{0,1\}, \zeta(z) = \pi^{z-\frac{1}{2}}\dfrac{\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)}\zeta(1-z).$

Or, par la proposition 29, on a : $\forall z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_-, \Gamma\left(\dfrac{1-z}{2}\right) = \pi^{\frac{1}{2}}2^z\dfrac{\Gamma(1-z)}{\Gamma\left(1-\frac{z}{2}\right)}.$

Ainsi, par la proposition 31, on a :

$\forall z \in \mathbb{C}\backslash\{0,1\}, \zeta(z) = \pi^z 2^z\dfrac{\Gamma(1-z)}{\Gamma\left(1-\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)}\zeta(1-z) = 2^z\pi^{z-1}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}z\right)\Gamma(1-z)\zeta(1-z).$ $\square$

Conséquence. Comme sur la bande $\{z \in \mathbb{C}, 0 < \Re(z) < 1\}$, $z \mapsto \sin\left(\frac{\pi}{2}z\right)$ et $z \mapsto \Gamma(1-z)$ ne s'annulent pas, on en déduit que les zéros non triviaux de ζ sont symétriques par rapport à la droite $\{z \in \mathbb{C}, \Re(z) = \frac{1}{2}\}$.

3- Enoncé équivalent à la conjecture de Riemann

On remarque qu'avec ce qui précède que la conjecture de Riemann est équivalente à :
"les zéros de ζ ont une partie réelle d'au plus $\frac{1}{2}$".

Théorème 36 (Enoncés équivalents à la conjecture de Riemann)**.**

Les énoncés suivants sont équivalents :

1. $\displaystyle\sum_{n\leq x} \Lambda(n) \underset{x\to+\infty}{=} x + O\left(x^{\frac{1}{2}+o(1)}\right)$;
2. $\forall x \geq 2, \displaystyle\sum_{n\leq x} \Lambda(n) = x + O(\sqrt{x}\ln^2(x))$;
3. *Les zéros ρ de ζ ont une partie réelle d'au plus $\frac{1}{2}$.*

Démonstration. Pour montrer ces équivalences, on va procéder de la sorte : (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$ (3).

$\diamond$ On suppose (3) et on veut montrer (2).

En appliquant le corollaire 22 pour $\delta = \frac{1}{2}$, $x \geq 2$ et $2 \leq T = \frac{2}{\sqrt{2}}\sqrt{x} \leq x$, on obtient le résultat.

$\diamond$ On suppose (2) et on veut montrer (1).

Soit $\varepsilon > 0$, on a : $\forall x \geq 2, \dfrac{|\psi(x) - x|}{x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} \leq \dfrac{\ln^2(x)}{x^\varepsilon} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ ce qui donne le résultat.

$\diamond$ On suppose (1) et on veut montrer (3).

Soit $\varepsilon > 0$: il existe $A \geq 1$ et $C_\varepsilon > 0$ tels que : $\forall x \geq A, |\psi(x) - x| \leq C_\varepsilon x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$.

On a vu que : $\forall z \in \Omega_1, -\dfrac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = z\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{z+1}} \sum_{n\leq x} \Lambda(n)dx = -\frac{z}{z-1} + z\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{z+1}} \left(\sum_{n\leq x} \Lambda(n) - x\right) dx.$

Il suffit de montrer que l'intégrale est holomorphe sur $\Omega_{\frac{1}{2}}$ pour avoir le résultat car dans ce cas $\dfrac{\zeta'}{\zeta}$ s'étend en une fonction holomorphe sur $\Omega_{\frac{1}{2}} \backslash \{1\}$ et n'a donc pas d'autre pôle que 1 sur $\Omega_{\frac{1}{2}}$.

Pour cela, on utilise le théorème de dérivation sous le signe intégrale.

— $z \mapsto \dfrac{\psi(x) - x}{x^{z+1}}$ est holomorphe sur $\Omega_{\frac{1}{2}}$ pour tout $x \geq 1$;
— Soit K, un compact de $\Omega_{\frac{1}{2}}$: il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $z \in K, \Re(z) \geq \dfrac{1}{2} + \delta$.

$*$ Si $x \in [A, +\infty[$, on a : $\forall z \in K, \left|\dfrac{\psi(x) - x}{x^{z+1}}\right| \leq \dfrac{C_\varepsilon}{x^{\Re(z)+\frac{1}{2}-\varepsilon}} \leq \dfrac{C_\varepsilon}{x^{1+\delta-\varepsilon}}$.
On choisit ε tel que $\delta - \varepsilon > 0$: $x \mapsto \dfrac{C_\varepsilon}{x^{1+\delta-\varepsilon}}$ est intégrable sur $[A, +\infty[$, positive et indépendante de z.

$*$ Si $x \in [1, A[$, on a : $\forall z \in K, \left|\dfrac{\psi(x) - x}{x^{z+1}}\right| \leq \dfrac{\psi(A)}{x^{2-\frac{1}{2}+\delta}} + \dfrac{1}{x^{1-\frac{1}{2}+\delta}}$.
Comme $\delta > 0$, $x \mapsto \dfrac{\psi(A)}{x^{2-\frac{1}{2}+\delta}} + \dfrac{1}{x^{1-\frac{1}{2}+\delta}}$ est intégrable sur $[1, A[$, positive et indépendante de z.

On a donc le résultat voulu.

□

Conséquence. Comme précédemment, si on a une majoration plus fine pour ψ, on a une majoration plus fine pour π.

En effet, on suppose qu'il existe $C > 0$ tel que : $\forall x \geq 2, |\psi(x) - x| \leq C\sqrt{x}\ln^2(x)$.

En reprenant la fonction J définie dans la partie III, on a : $\forall x \geq 2, J(x) = Li(x) + \dfrac{2}{\ln(2)} + \dfrac{\psi(x) - x}{\ln(x)} + \displaystyle\int_2^x \dfrac{\psi(t) - t}{t\ln^2(t)}dt$.

Donc : $\forall x \geq 2, |J(x) - Li(x)| \leq \dfrac{2}{\ln(2)} + C\sqrt{x}\ln(x) + C\displaystyle\int_2^x \dfrac{1}{\sqrt{t}}dt \leq \dfrac{2}{\ln(2)} + C\sqrt{x}\ln(x) + 2C\sqrt{x} = O\left(\sqrt{x}\ln(x)\right)$.

Or, on sait de plus que : $\forall x \geq 2, 0 \leq J(x) - \pi(x) \leq \dfrac{\sqrt{x}}{2}\dfrac{\ln(x)}{\ln(2)} = O\left(\sqrt{x}\ln(x)\right)$.

Donc : $\forall x \geq 2, |\pi(x) - Li(x)| \leq |\pi(x) - J(x)| + |J(x) - Li(x)| = O\left(\sqrt{x}\ln(x)\right)$.

Ainsi, on a bien : $\forall x \geq 2, \pi(x) = Li(x) + O\left(\sqrt{x}\ln(x)\right)$.

Annexe 1- Démonstration du lemme 10

Dans cette annexe, on va démontrer le lemme 10, énoncé page 10 dont on rappelle l'énoncé ci-dessous :

Lemme. *Soit* $f \in L^{\infty}([0, +\infty[)$ *et* $F : z \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tz} f(t)dt$.

On suppose que F*, qui est holomorphe sur* Ω_0*, possède un prolongement holomorphe sur un voisinage* V *de* $\overline{\Omega_0}$.

On a alors : $\displaystyle\int_0^T f(t)dt$ *converge quand* T *tend vers* $+\infty$ *et* $F(0) = \lim_{T \to +\infty} \displaystyle\int_0^T f(t)dt$.

Démonstration. On peut supposer sans perte de généralité que $F(0) = 0$: $z \mapsto \dfrac{F(z)}{z}$ est donc holomorphe sur V.

Soit $T > 0$, on définit $F_T : z \mapsto \displaystyle\int_0^T e^{-tz} f(t)dt$.

Par le théorème de dérivation sous le signe intégrale, on montre que F_T est une fonction entière.

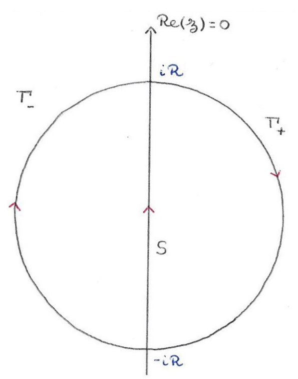
En effet, on a :

— $z \mapsto e^{-tz} f(t)$ est une fonction entière pour $t \in]0, T]$;
— Soit K, un compact de $\mathbb{C}$: il existe $M > 0$ tel que pour tout $z \in K, |\Re(z)| \leq M$.

On a : $\forall z \in K, \forall t \in]0, T], |e^{-tz} f(t)| \leq \|f\|_{\infty} e^{tM}$.

Comme $t \mapsto \|f\|_{\infty} e^{tM}$ est intégrable sur $[0, T[$, positive et indépendante de z, F_T est bien une fonction entière.

Soit $\varepsilon > 0$, on fixe $R > 0$ tel que : $\dfrac{\|f\|_{\infty}}{R} < \dfrac{\varepsilon}{3}$.



On introduit maintenant les ensembles suivants :

$\Gamma_+ = \{z \in \mathbb{C}, |z| = R \text{ } et \text{ } \Re(z) \geq 0\}$;
$\Gamma_- = \{z \in \mathbb{C}, |z| = R \text{ } et \text{ } \Re(z) \leq 0\}$;
$\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_-$;
$S = [-iR, iR]$.

On peut maintenant appliquer le théorème des résidus à ces contours.

On pose : $H_T : z \mapsto F_T(z)\dfrac{e^{Tz}}{z}\left(1+\dfrac{z^2}{R^2}\right)$ pour $z \in \mathbb{C}^*$;

$H : z \mapsto (F(z)-F_T(z))\dfrac{e^{Tz}}{z}\left(1+\dfrac{z^2}{R^2}\right)$ pour $z \in V$;

$g : z \mapsto F(z)\dfrac{e^{Tz}}{z}\left(1+\dfrac{z^2}{R^2}\right)$ pour $z \in V$.

$\diamond$ On va tout d'abord montrer que : $F_T(0) = \dfrac{-1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\Gamma_+} H(z)dz + \dfrac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_-} H_T(z)dz - \dfrac{1}{2\pi}\int_S g(z)dz$.

On remarque que $z \mapsto zH_T(z)$ est une fonction entière.

Par la formule de Cauchy, on a alors : $F_T(0) = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_\Gamma H_T(z)dz$ i.e. $F_T(0) = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\Gamma_+} H_T(z)dz + \dfrac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_-} H_T(z)dz$.

De plus, comme $z \mapsto \dfrac{F(z)}{z}$ est holomorphe sur $V \supset \Gamma_+ \cup S$, on en déduit que g l'est aussi.

Ainsi, par le théorème des résidus, on a : $\displaystyle\int_{\Gamma_+\cup S} g(z)dz = 0$ autrement dit $\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\Gamma_+} g(z)dz + \dfrac{1}{2i\pi}\int_S g(z)dz = 0$.

$$\begin{aligned}
\text{Donc : } F_T(0) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_+}(H_T(z)-g(z))dz + \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_-} H_T(z)dz - \frac{1}{2i\pi}\int_S g(z)dz \\
&= \frac{-1}{2i\pi}\int_{\Gamma_+} H(z)dz + \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_-} H_T(z)dz - \frac{1}{2i\pi}\int_S g(z)dz.
\end{aligned}$$

$\diamond$ Il reste à montrer que chacune des intégrales tend vers 0 quand T tend vers $+\infty$ pour avoir le résultat.

$*$ On a : $\left|\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\Gamma_+} H(z)dz\right| \leq \dfrac{1}{2\pi}\pi R \sup_{z\in\Gamma_+}|H(z)|$ et $\left|\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\Gamma_-} H_T(z)dz\right| \leq \dfrac{1}{2\pi}\pi R \sup_{z\in\Gamma_-}|H_T(z)|$.

. Or : $\forall z \in \Gamma_+, |H(z)| = \dfrac{|F(z)-F_T(z)|e^{T\Re(z)}}{|z|}\left|1+\dfrac{z^2}{R^2}\right|. \leq \left(\displaystyle\int_T^{+\infty} e^{-t\Re(z)}dt\right)\|f\|_\infty e^{T\Re(z)}|z|\left|\dfrac{1}{z}+\dfrac{z}{R^2}\right|$.

D'où : $\forall z \in \Gamma_+, |H(z)| \leq \dfrac{\|f\|_\infty}{\Re(z)}\left|\dfrac{\overline{z}+z}{R^2}\right| = \dfrac{2\|f\|_\infty}{R^2}$.

. De même : $\forall z \in \Gamma_-, |H_T(z)| = |F_T(z)|e^{T\Re(z)}\left|1+\dfrac{z^2}{R^2}\right| \leq \left(\displaystyle\int_0^T e^{-t\Re(z)}dt\right)\|f\|_\infty e^{T\Re(z)}\dfrac{2|\Re(z)|}{R^2}$.

D'où : $\forall z \in \Gamma_-, |H_T(z)| \leq (e^{-T\Re(z)}-1)\|f\|_\infty \dfrac{2e^{T\Re(z)}}{R^2} = \dfrac{2\|f\|_\infty}{R^2}$.

On a ainsi : $\left|\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\Gamma_+} H(z)dz\right| \leq \dfrac{\|f\|_\infty}{R}$ et $\left|\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\Gamma_-} H_T(z)dz\right| \leq \dfrac{\|f\|_\infty}{R}$.

$*$ Par ailleurs : $\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_S g(z)dz = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{-R}^{R} i\dfrac{F(iy)}{iy}e^{iTy}\left(1-\dfrac{y^2}{R^2}\right)dy.$

On pose $G_R : y \mapsto \dfrac{F(iy)}{iy}\left(1-\dfrac{y^2}{R^2}\right)$; G_R est intǵrable sur $[-R,R]$ car $z \mapsto \dfrac{F(z)}{z}$ est holomorphe sur S.

On a : $\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_S g(z)dz = \sqrt{2\pi}\widehat{G_R\mathbb{1}_{[-R,R]}}(-T) \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

Il existe donc $T_0 > 0$ tel que pour tout $T > T_0, \left|\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\Gamma_+} H(z)dz\right| \leq \dfrac{\varepsilon}{3}.$

Ainsi : $\forall\, T \geq T_0, |F_T(0)| \leq \dfrac{2\,\|f\|_\infty}{R} + \dfrac{\varepsilon}{3} \leq \varepsilon$ autrement dit : $\forall\, T \geq T_0, \left|\displaystyle\int_0^T f(t)dt\right| \leq \varepsilon.$

Ceci étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que f est intégrable sur $[0,+\infty[$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt = 0 = F(0).$

$\square$

Annexe 2- Démonstration de la formule de Jensen

Dans cette annexe, on va démontrer la formule de Jensen, énoncée par 25.

Démonstration. On peut supposer qu'aucun pôle ou zéro de f se trouve sur le cercle $\mathcal{C}(z_0, r)$.

En effet, si le résultat est établi pour un tel r, comme le nombre de zéros et de pôles d'une fonction méromorphe est fini dans un compact, on peut trouver une suite $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tel qu'il n'y ait aucun pôle ou zéro sur $\mathcal{C}_{r_k}$ et $r_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} r'$ pour n'importe quel $r' > 0$.

De plus, on peut aussi supposer sans perte de généraité que $z_0 = 0$ et $r = 1$.

On peut de plus supposer sans perte de généralité qu'il n'y aucun zéro ou pôle de f dans D_1.

En effet, on suppose que f a un zéro ρ dans D_1 : on considère alors la fonction $B_\rho : z \mapsto \dfrac{\rho - z}{1 - \overline{\rho} z}$.

On voit facilement que : $\forall z \in \mathbb{C}, |z| = 1 \Rightarrow |B_\rho(z)| = 1$.

De plus, B_ρ est une fonction holomorphe sur D_1 qui a un zéro simple en ρ, qui vaut ρ en 0 et qui n'a pas d'autres zéros sur D_1 : elle vérifie donc la formule de Jensen.

Si on montre la formule pour $\dfrac{f}{B_\rho}$ alors on a la formule pour f et $\dfrac{f}{B_\rho}$ permet de retirer un zéro de f dans D_1.

On procède de même pour enlever tous les zéros et les pôles de f.

Avec toutes ces considérations, il reste maintenant à prouver que : $\ln(|f(0)|) = \displaystyle\int_0^1 \ln|f(e^{2i\pi t})| dt$.

Comme f n'a ni zéro ni pôle dans D_1, $\dfrac{f'}{f}$ est une fonction holomorphe sur D_1 et admet donc une primitive qui est une détermination continue du logarithme que l'on notera log dans la suite.

$\log(f)$ est donc une fonction holomorphe sur D_1 : en appliquant la formule de la moyenne à cette fonction puis en prenant la partie réelle, on obtient ainsi le résultat. $\square$

Annexe 3- Démonstration du théorème 16

Dans cette annexe, on va démontrer le théorème 16, énoncé page 25, dont on rappelle l'énoncé ci-dessous :

Théorème.

Soit f, une fonction holomorphe sur un disque $D(z_0, r)$ où z_0 n'est pas un zéro de f et $r > 0$.

On suppose de plus que : $\star$ *f n'est pas identiquement nulle sur D_r ;*
$\star\ \exists M \geq 1, \forall z \in \mathcal{C}(z_0, r), |f(z)| \leq M|f(z_0)|$.

On fixe des constantes c_1 et c_2 telles que : $0 < c_2 < c_1 < 1$.

On a alors pour tout $z \in \{w \in \mathbb{C}, |w - z_0| \leq c_2 r\}$ tel que z ne soit pas un zéro de f :

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{\substack{\rho \in Z_f \\ |\rho - z_0| \leq c_1 r}} \frac{1}{z - \rho} + O_{c_1, c_2}\left(\frac{\ln(M)}{r}\right).$$

Avant de pouvoir démontrer ce théorème, il faut d'abord établir le lemme suivant.

Lemme 37.

Soit f, une fonction holomorphe sur D_1.

On a pour tout $z \in D_1$ tel que $|z| < 1$:

$$f(z) = \int_0^1 f(e^{2i\pi t}) \Re\left(\frac{e^{2i\pi t} + z}{e^{2i\pi t} - z}\right) dt.$$

Démonstration. On pose $P_r(t) = \Re\left(\frac{1 + re^{2i\pi t}}{1 - re^{2i\pi t}}\right) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(2\pi t) + r^2}$.

Soit $z = re^{2i\pi\theta} \in D_1$ tel que $r < 1$ et $\tilde{z} = \frac{z}{r^2} = \frac{1}{r}e^{2i\pi\theta}$.

Comme f est analytique sur $\mathcal{C}_1$, par la formule de Cauchy, on a : $f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}_1} \frac{f(w)}{w - z} dw$ et $0 = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}_1} \frac{f(w)}{w - \tilde{z}} dw$.

Ainsi : $f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}_1} f(w)\left[\frac{1}{w - z} - \frac{1}{w - \tilde{z}}\right] dw = \int_0^1 e^{2i\pi t} f(e^{2i\pi t})\left[\frac{1}{e^{2i\pi t} - re^{2i\pi\theta}} - \frac{r}{re^{2i\pi t} - e^{2i\pi\theta}}\right] dw.$

$$\text{Or : } \frac{1}{e^{2i\pi t} - re^{2i\pi\theta}} - \frac{r}{re^{2i\pi t} - e^{2i\pi\theta}} = \frac{-e^{2i\pi(t+\theta)}(1-r^2)}{(e^{2i\pi t} - re^{2i\pi\theta})(re^{2i\pi t} - e^{2i\pi\theta})}$$
$$= \frac{-e^{2i\pi(t+\theta)}(1-r^2)}{re^{4i\pi t} - e^{2i\pi(t+\theta)} - r^2e^{2i\pi(t+\theta)} + re^{4i\pi\theta}}$$
$$= \frac{1-r^2}{1-2rcos(2\pi(\theta-t))+r^2}.$$

Donc : $f(z) = \displaystyle\int_0^1 f(e^{2i\pi t})P_r(\theta - t)dt$ et $\forall t \in [0,1]$, $P_r(\theta - t) = \Re\left(\dfrac{1+re^{2i\pi(\theta-t)}}{1-re^{2i\pi(\theta-t)}}\right) = \Re\left(\dfrac{e^{2i\pi t}+z}{e^{2i\pi t}-z}\right)$.

□

On peut donc maintenant démontrer le théorème 16.

Démonstration. On peut supposer sans perte de généralité que $z_0 = 0$ et $r = 1$.

On veut alors montrer que : $\forall z \in D_1, |z| \leq c_2 \Rightarrow \dfrac{f'(z)}{f(z)} - \displaystyle\sum_{\substack{\rho \in Z_f \\ |\rho| \leq c_1}} \frac{1}{z-\rho} = O_{c_1,c_2}(\ln(M))$. (8)

Comme f est non identiquement nulle sur D_1, on remarque que le principe du maximum impose que $f(0) \neq 0$.

On peut donc réécrire l'hypothèse sous la forme : $\forall z \in \mathcal{C}_1, \ln|f(z)| \leq \ln|f(0)| + O(\ln(M))$.

$$\text{En appliquant la formule de Jensen à } f\text{, on a : } \ln|f(z_0)| = \int_0^1 \ln|f(e^{2i\pi t})|dt + \sum_{\substack{\rho \in Z_f \\ |\rho \leq 1}} \ln|\rho|$$
$$\leq \ln|f(z_0)| + O(\ln(M)) + \sum_{\substack{\rho \in Z_f \\ |\rho \leq 1}} \ln|\rho|.$$

Ainsi : $\displaystyle\sum_{\substack{\rho \in Z_f \\ |\rho| \leq 1}} \ln\left(\frac{1}{|\rho|}\right) = O(\ln(M))$. (9)

En particulier, comme $c_1 < 1$, on voit avec l'égalité précédente que le nombre de zéros ρ de f tel que $|\rho| \leq c_1$ est en $O_{c_1}(\ln(M))$.

$\diamond$ On peut de plus supposer sans perte de généralité que f n'a pas de zéro dans D_1.

En effet, on suppose que f a un zéro ρ dans D_1.

On considère la fonction B_ρ définie comme la démonstration de la formule de Jensen et $g = fB_\rho$.

g est une fonction holomorphe sur D_1 comme produit de fonctions holomorphes et a un zéro de moins en ρ par rapport à f.

On voit facilement que : $\forall z \in D_1, f(z) \neq 0 \Rightarrow \dfrac{f'(z)}{f(z)} = \dfrac{B'_\rho(z)}{B_\rho(z)} + \dfrac{g'(z)}{g(z)} = \dfrac{g'(z)}{g(z)} + \dfrac{1}{z-\rho} - \dfrac{1}{z-\frac{1}{\bar\rho}}$.

$*$ On suppose que $c_1 < |\rho| \leq 1$: $\left|\rho - \dfrac{1}{\bar\rho}\right| = \dfrac{1}{|\rho|} - |\rho| = O_{c_1}\left(\ln\left(\dfrac{1}{|\rho|}\right)\right)$ car $\dfrac{\frac{1}{x} - x}{\ln\left(\frac{1}{x}\right)} \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 2$.

De plus : $\forall z \in D_1, |z| \leq c_2 \Rightarrow \left|\dfrac{1}{z-\rho} - \dfrac{1}{z-\frac{1}{\bar\rho}}\right| \leq \dfrac{\left|\rho - \frac{1}{\bar\rho}\right|}{(|\rho| - |z|)\left(\frac{1}{|\rho|} - |z|\right)} \leq O_{c_1,c_2}\left(\ln\left(\dfrac{1}{|\rho|}\right)\right)$.

Ainsi : $\forall z \in D_1, |z| \leq c_2 \Rightarrow \dfrac{1}{z-\rho} - \dfrac{1}{z-\frac{1}{\bar\rho}} = O_{c_1,c_2}\left(\ln\left(\dfrac{1}{|\rho|}\right)\right) = O_{c_1,c_2}(\ln(M))$ par (9).

Par ailleurs : $\forall z \in \mathcal{C}_1, \ln|g(z)| = \ln|f(z)|$ et $\ln|g(0)| = \ln|f(0)| + \ln\left(\dfrac{1}{|\rho|}\right) = \ln|f(0)| + O_{c_1,c_2}(\ln(M))$ par (9).

Ainsi, g vérifie aussi les hypothèses du théorème : on peut donc retirer les zéros de f dans la bande $\{\rho \in Z_f, c_1 < |\rho| \leq 1\}$ car cela n'affecte la partie gauche de (8) que d'un $O_{c_1,c_2}(\ln(M))$.

$*$ On suppose que $|\rho| \leq c_1$: $\forall z \in D_1, |z| \leq c_2 \Rightarrow \left|\dfrac{1}{z-\frac{1}{\bar\rho}}\right| \leq \dfrac{|\bar\rho|}{|z\bar\rho - 1|} \leq O_{c_1,c_2}(1)$.

Comme précédemment, g vérifie les hypothèses du théorème : comme le nombre de zéros ρ de f tel que $|\rho| \leq c_1$ est en $O_{c_1}(\ln(M))$, on peut donc retirer les zéros de f dans $\{\rho \in Z_f, |\rho| \leq c_1\}$ car cela n'affecte la partie gauche de (8) que d'un $O_{c_1,c_2}(\ln(M))$.

$\diamond$ On peut de plus supposer dans perte de généralité que $f(0) = 1$.

On a alors par hypothèse pour $t \in [0,1]$, $\ln|f(e^{2i\pi t})| \leq O_{c_1,c_2}(\ln(M))$.

On veut montrer que : $\forall z \in D_1, |z| \leq c_2 \Rightarrow \dfrac{f'(z)}{f(z)} = O_{c_1,c_2}(\ln(M))$.

Par la formule de Jensen, on a : $0 = \displaystyle\int_0^1 \ln|f(e^{2i\pi t})|dt$.

Comme pour tout $t \in [0,1]$, $|\ln|f(e^{2i\pi t})|| = 2\max(\{\ln|f(e^{2i\pi t})|, 0\}) - \ln|f(e^{2i\pi t})| \leq O_{c_1,c_2}(\ln(M)) - \ln|f(e^{2i\pi t})|$, on a : $\displaystyle\int_0^1 |\ln|f(e^{2i\pi t})||dt \leq O_{c_1,c_2}(\ln(M))$.

De plus, comme f ne s'annule par sur D_1, $\dfrac{f'}{f}$ est holomorphe sur D_1 et admet donc une primitive qui est une détermination continue du logarithme que l'on notera par la suite log.

En appliquant la proposition précédente à $\log(f)$, qui est holomorphe sur D_1, puis en prenant la partie réelle, on a : $\forall z \in D_1, |z| \leq c_2 \Rightarrow \ln|f(z)| = \displaystyle\int_0^1 \ln|f(e^{2i\pi t})| \Re\left(\dfrac{e^{2i\pi t} + z}{e^{2i\pi t} - z}\right) dt$.

D'où : $\forall z \in D_1, |z| \leq c_2 \Rightarrow |\ln|f(z)|| \leq \displaystyle\int_0^1 |\ln|f(e^{2i\pi t})|| \left|\dfrac{e^{2i\pi t} + z}{e^{2i\pi t} - z}\right| dt \leq O_{c_1,c_2}(\ln(M))$.

Ainsi : $\forall z \in \{w \in D_1, |w| \leq c_2\}, \ln|f(z)| = O_{c_1,c_2}(\ln(M))$.

Si on considère les fonctions précédentes comme des fonctions à deux variables, on a pour $t \in [0,1]$:
$\dfrac{\partial}{\partial x}\Re\left(\dfrac{e^{2i\pi t}+x+iy}{e^{2i\pi t}-x-iy}\right) = \Re\left(\dfrac{2e^{2i\pi t}}{(e^{2i\pi t}-x-iy)^2}\right)$ et $\dfrac{\partial}{\partial y}\Re\left(\dfrac{e^{2i\pi t}+x+iy}{e^{2i\pi t}-x-iy}\right) = \Re\left(\dfrac{2ie^{2i\pi t}}{(e^{2i\pi t}-x-iy)^2}\right)$.

Or, pour tout $t \in [0,1]$ et pour tout $z = x+iy \in D_1$ tel que $|z| \leq c_2$, on a :
$\left|\ln|f(e^{2i\pi t})|\dfrac{\partial}{\partial w}\Re\left(\dfrac{e^{2i\pi t}+x+iy}{e^{2i\pi t}-x-iy}\right)\right| \leq \dfrac{2}{(1-c_2)^2}|\ln|f(e^{2i\pi t})||$ pour $w \in \{x,y\}$.

Ainsi, par le théorème de dérivation sous le signe intégrale, on a :
$\dfrac{\partial}{\partial w}\ln|f(z)| = \displaystyle\int_0^1 \ln|f(e^{2i\pi t})|\dfrac{\partial}{\partial w}\Re\left(\dfrac{e^{2i\pi t}+x+iy}{e^{2i\pi t}-x-iy}\right)dt$ pour $w \in \{x,y\}$.

De même que précédemment, on peut montrer que pour tout $z = x+iy \in D_1$ tel que $|z| \leq c_2$, on a :
$\dfrac{\partial}{\partial w}\ln|f(z)| = O_{c_1,c_2}(\ln(M))$ pour $w \in \{x,y\}$.

Comme $\log(f)$ est une fonction holomorphe sur D_1, elle vérifie les équations de Cauchy-Riemann et on a alors le résultat.

$\square$

Annexe 4- Démonstration de la formule sommatoire de Poisson

Dans cette annexe, on va démontrer la formule sommatoire de Poisson, énoncée page 37.

Démonstration. On considère $f : x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} F(x+n)$.

$\diamond$ La série converge normalement sur tout compact de $\mathbb{R}$.

En effet, soit $A > 0$ et $x \in [-A, A]$, on a : $\forall n \in \mathbb{Z}, |n| \geq 2A \Rightarrow |x+n| \geq |n| - |x| \geq |n| - A \geq \dfrac{|n|}{2}$.

Ainsi : $\forall x \in [-A, A], \forall n \in \mathbb{Z}, |n| \geq 2A \Rightarrow |F(x+n)| \leq \dfrac{M}{(1+\frac{|n|}{2})^{\alpha}}$.

Or : $\left(\dfrac{M}{(1+\frac{|n|}{2})^{\alpha}}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est le terme général d'une série convergente, positive et indépendante de x.

On a donc bien convergence normale de la série sur tout compact de $\mathbb{R}$.

$\diamond$ f est continue car F l'est et que la série converge normalement sur tout compact de $\mathbb{R}$.

De plus, on voit facilement que f est 1-périodique : on peut alors calculer ses coefficients de Fourier.

On a : $\forall m \in \mathbb{Z}, c_m(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)e^{-2i\pi mt}dt = \int_0^1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} F(t+n)e^{-2i\pi mt}dt$.

On peut intervertir somme et intégrale car pour tout $m \in \mathbb{Z}$ et pour tout $t \in [0,1]$, $|e^{-2i\pi mt}| = 1$ et de plus $\sum_n F(t+n)$ converge normalement sur $[0,1]$.

On a alors : $\forall m \in \mathbb{Z}, c_m(f) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^1 F(t+n)e^{-2i\pi m(t+n)}dt \underset{u=t+n}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_n^{n+1} F(u)e^{-2i\pi mu}du = \widehat{F}(m)$.

On a alors : $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{F}(n)| < +\infty$ par hypothèse.

La série de Fourier associée à f converge donc absolument et comme cette dernière converge simplement vers f, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{2i\pi nx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{F}(n)e^{2i\pi nx}$.

En appliquant ceci en 0, on a le résultat.

$\square$

Bibliographie

[1] François De Marçay. Fonction gamma d'euler et fonction zêta de riemann. https ://www.math.u-psud.fr/erker/Enseignement/Analyse-Complexe/gamma-z-zeta-s.pdf.

[2] Hervé Queffélec and Claude Zuily. *Analyse pour l'agrégation*. Dunod, 2013.

[3] Terence Tao. Complex-analytic multiplicative number theory, Décembre 2014. https ://terrytao.wordpress.com/.

[4] Terence Tao. A little bit of complex and fourier analysis, Décembre 2014. https ://terrytao.wordpress.com/.